

Universidad Carlos III de Madrid.

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría
de Estructuras.



ANÁLISIS DEL ESTADO TENSIONAL DE VIGAS DE
TIPO LAMINADO SOMETIDAS A CARGAS
DINÁMICAS

Proyecto Fin de Carrera.
Ingeniería Industrial.

Autor: Alberto Rodero Sánchez-Patón

Tutores: Enrique Barbero Pozuelo
Sonia Sánchez Sáez

Febrero 2010

Si no conozco una cosa, la investigaré.

Louis Pasteur (1822-1895)

Químico y microbiólogo francés.

Lo que con mucho trabajo se adquiere, más se ama.

Aristóteles (384 AC-322 AC)

Filósofo griego.

Abstract

It is remarkable the increasing use of advanced composite materials in manufacturing of structural elements in recent years. Thus traditional materials such as steel, wood or aluminum are giving terrain in certain applications to advanced composite materials, which succeed in improving specific properties.

In order to deepen in the field of structural composite materials, this paper will study the tensional state of a composite laminated beam subjected to dynamic loads generating flexional efforts.

In order to solve the equations of motion modal analysis will be used. The stacking sequence, geometry and support conditions will be analyzed. In order to determine whether or not the beam breaks under the action of the external forces the Tsai-Hill broken criterion will be used.

Resumen

Es notable el aumento del uso de materiales compuestos avanzados en la fabricación de elementos estructurales en los últimos años. Así pues, los materiales tradicionales como el acero, la madera o el aluminio van cediendo terreno en ciertas aplicaciones a materiales compuestos avanzados, que consiguen mejorar propiedades específicas.

Con ánimo de profundizar en el campo de los materiales compuestos estructurales, en el presente trabajo se estudiará el estado tensional de una viga de material compuesto de tipo laminado sometida a cargas dinámicas que generen esfuerzos de flexión.

Para la resolución de las ecuaciones del movimiento se utilizará el análisis modal. Se analizará la influencia de la secuencia de apilamiento, la geometría y las condiciones de apoyo. Con objeto de determinar si la viga rompe o no bajo la acción de las fuerzas exteriores se empleará el criterio de rotura de Tsai-Hill.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos	4
1.3. Estructura del proyecto	5
2. Desarrollo teórico	7
2.1. Materiales compuestos	7
2.2. Teoría clásica del laminado	10
2.2.1. Ecuaciones del movimiento viga Euler - Bernoulli.	15
2.3. Teoría de cortadura de primer orden.	20
2.3.1. Cálculo del coeficiente de corrección de cortadura	23
2.3.2. Ecuaciones del movimiento viga Timoshenko.	27
2.4. Parámetros del laminado	47
2.5. Criterios de rotura	47
2.5.1. Criterios de fallo en la lámina.	48
2.5.2. Criterios de fallo del laminado.	51
3. Resultados	53
3.1. Descripción del modelo	53
3.1.1. Modelo dinámico. Teoría de cortadura y viga Timoshenko. . .	54

3.1.2. Modelo estático. Teoría clásica del laminado y viga Euler. . .	56
3.2. Validación del modelo	59
3.2.1. Datos experimentales	59
3.2.2. Comparación de resultados	63
3.3. Influencia de la geometría	66
3.4. Influencia de la velocidad de aplicación de la carga.	68
3.5. Ejemplo de aplicación	71
4. Conclusiones y trabajos futuros	77
4.1. Resumen y conclusiones	77
4.2. Trabajos futuros	80
A. Anexos	81
A.1. Programa informático	81
A.1.1. Funciones	81
A.1.2. Ejemplo de archivo de introducción de datos	107
A.2. Nomenclatura	109
Bibliografía	111

Índice de figuras

1.1. Aumento del consumo de materiales compuestos por sectores	2
1.2. Ejemplos de elementos estructurales de material compuesto	3
2.1. Ejemplo de secuencias de apilamiento	9
2.2. Giro de una sección según la teoría clásica del laminado	12
2.3. Viga biapoyada con carga puntual.	16
2.4. Viga biapoyada con carga distribuida.	17
2.5. Viga en voladizo con carga puntual.	18
2.6. Viga en voladizo con carga distribuida.	19
2.7. Giro de una sección según la teoría de cortadura de primer orden . .	20
2.8. Esfuerzos actuantes en una sección de una viga Timoshenko	28
2.9. Condiciones de contorno. Viga biapoyada	29
2.10. Condiciones de contorno. Viga en voladizo	30
3.1. Resumen del modelo matemático para cargas dinámicas	57
3.2. Geometría de las probetas en los ensayos	60
3.3. Registro Fuerza - tiempo	61
3.4. Curva de aceleración	62
3.5. Curva de velocidad	63
3.6. Curva de desplazamiento	64

3.7. Fuerza triangular $f(x, t) = \frac{F_r}{t_r}t$	65
3.8. Diferencias entre la flecha estática y dinámica	68
3.9. Influencia de la velocidad en w	69
3.10. Influencia de la velocidad en R	70
3.11. Ejemplo. Desplazamiento vertical	73
3.12. Ejemplo. Giro de las secciones	73
3.13. Ejemplo. Momento flector	74
3.14. Ejemplo. Esfuerzo cortante	75
A.1. Ejemplo de archivo excel con datos iniciales. Láminas	107
A.2. Ejemplo de archivo excel con datos iniciales. Laminado	108

Índice de tablas

2.1. Ecuación de frecuencias para una viga Timoshenko , $a < a_c$	38
2.2. Ecuación de frecuencias para una viga Timoshenko , $a > a_c$	38
2.3. Soluciones de la ecuación espacial	42
3.1. Propiedades mecánicas del material	61
3.2. Resumen de los datos experimentales en el instante de rotura	64
3.3. Resumen de los datos del modelo en el instante de rotura	65
3.4. Diferencias entre datos experimentales y los calculados por el modelo simplificado	66
3.5. Secuencias de apilamiento y grado de anisotropía	67

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

El uso de materiales compuestos en elementos estructurales ha presentado un notable aumento durante los últimos años. Tradicionalmente el empleo de elementos estructurales a base de materiales compuestos quedaba restringido a industrias de alta tecnología como la aeronáutica o aeroespacial. Los avances tecnológicos y la reducción de costes han permitido a este tipo de elementos entrar con fuerza en otras industrias como la industria del automóvil, naval, objetos deportivos, en la rehabilitación de edificios, etc. Las excelentes propiedades rigidez-peso y resistencia-peso de los materiales compuestos, especialmente los de tipo laminado hacen de ellos unos candidatos perfectos para sustituir a los tradicionales materiales usados en estructuras, tales como la madera o el acero.

En particular el uso de elementos estructurales con comportamiento de tipo viga, formados por materiales compuestos de tipo laminado, esta ampliamente extendido en la industria. La figura 1.2 muestra algunos ejemplos de elementos estructurales a base materiales compuestos fabricados con laminas unidireccionales con un comportamiento de tipo viga.

El uso de estos elementos a nivel industrial implica la necesidad de conocer sus características y su comportamiento, en particular las tensiones y deformaciones que experimentan las vigas de tipo laminado bajo un determinado estado de carga. Dada la gran variedad de materiales compuestos y elementos estructurales que admiten

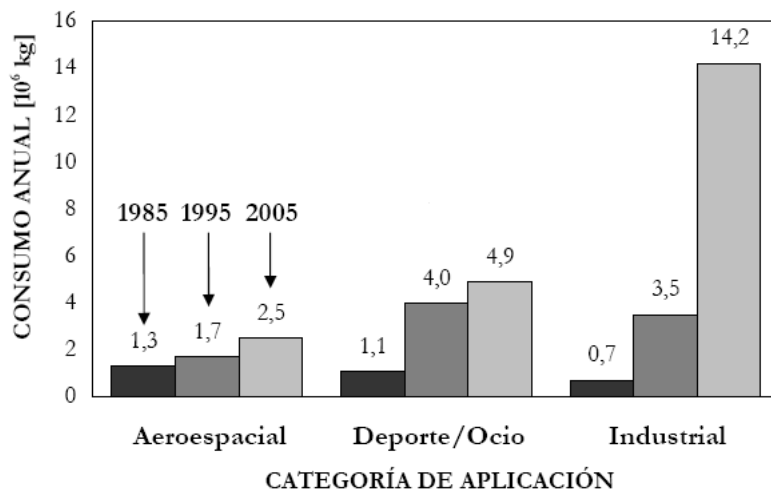


Figura 1.1: Aumento del consumo de materiales compuestos por sectores

su uso, el conocimiento de las características y comportamiento de un elemento particular se adquieren tradicionalmente mediante ensayos experimentales o modelos de elementos finitos aplicados a cada caso particular.

El presente trabajo pretende desarrollar un modelo simplificado para este tipo de elementos que sirva como primera aproximación, o como un prediseño para un posterior modelo de elementos finitos y que permita conocer el estado tensional de vigas de tipo laminado bajo cargas dinámicas que generen esfuerzos de flexión.

El modelo simplificado buscado deberá ser ampliamente configurable en sus datos de entrada con el objeto de realizar estudios paramétricos. Este comportamiento será una ventaja frente a otros modelos más complejos pero más rígidos y que ofrezcan menos grados de libertad en la configuración del problema. Se pretende así que el modelo simplificado ofrezca un estudio rápido del comportamiento de las vigas frente a la variación de parámetros geométricos, tales como el espesor o la longitud de las vigas, frente a cambios en los materiales o cambios en la secuencia de apilamiento.

El estudio del estado tensional de vigas isótropas sometidas a esfuerzos estáticos, no variables con el tiempo, es ampliamente conocido y tratado por la teoría de elasticidad y resistencia de materiales. Más allá surgen diversas teorías que extienden la teoría de elasticidad y resistencia de materiales a vigas no homogéneas, en particular a vigas formadas por láminas de material compuesto como las que se pretende estudiar.

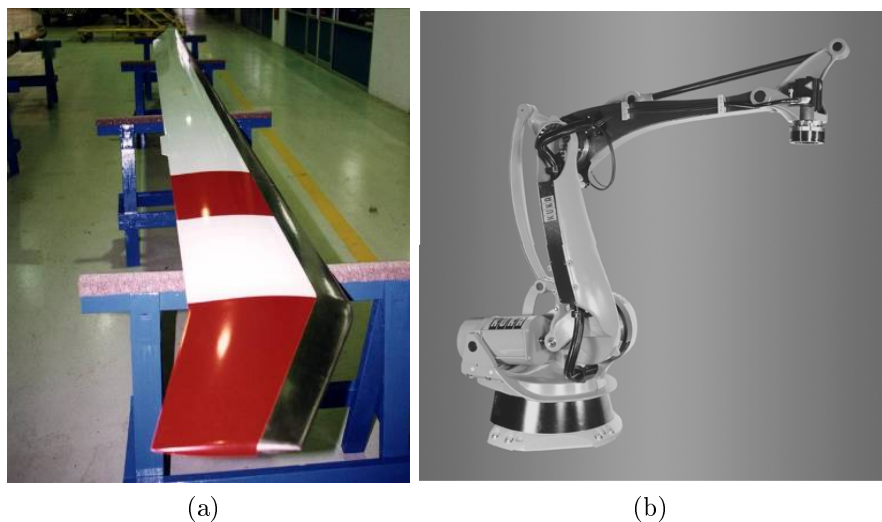


Figura 1.2: Ejemplos de elementos compuestos con comportamiento estructural tipo viga, (a) Pala de aerogenerador, (b) Brazo de robot

La teoría más básica es la teoría clásica del laminado, que considera los esfuerzos axiles y flectores a los que están sometidas las vigas de tipo laminado. Como extensión a la teoría clásica del laminado, se introduce entre otras la teoría de cortadura de primer orden que considera además los esfuerzos cortantes interlaminares y las fuerzas de inercia.

Para desarrollar el modelo simplificado objeto de este trabajo se utilizará la teoría de cortadura de primer orden para relacionar los esfuerzos con las tensiones y deformaciones. Para el cálculo de los desplazamientos se emplearán las ecuaciones de una viga tipo Timoshenko. Las ecuaciones de Timoshenko ofrecen una mayor generalidad que las clásicas ecuaciones de Euler-Bernoulli, al incluir los esfuerzos de inercia y cortadura en el cálculo de los desplazamientos de una viga. La ventaja de las ecuaciones de Timoshenko es que son validas cuando la esbeltez de la viga (la longitud de la viga dividida por su espesor) es pequeña, mientras que las ecuaciones de Euler-Bernoulli dejan de ser aplicables.

Conocidos los desplazamientos y las tensiones en las vigas se deberá comprobar si rompen por acción de las cargas dinámicas exteriores, para ello se utilizará el criterio de rotura de Tsai- Hill.

1.2. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar un modelo simplificado que permita conocer el estado tensional de vigas formadas por láminas de materiales compuestos, sometidas a cargas exteriores variables en el tiempo y que generen esfuerzos de flexión.

Para alcanzar este objetivo se deberán ejecutar los siguientes pasos

- Utilizar las teorías clásica y de cortadura del laminado para hallar los parámetros globales de las vigas y las relaciones entre esfuerzos, tensiones y deformaciones presentes en las mismas.
- Deducir y resolver las ecuaciones de Timoshenko que permitan calcular los desplazamientos presentes en las vigas. Se resolverán las ecuaciones para dos configuraciones distintas: vigas biapoyadas y vigas en voladizo.
- Desarrollar un modelo matemático que sistematice los cálculos anteriores.
- Implementar el modelo en *MATLAB* particularizado para vigas biapoyadas sometidas a cargas puntuales dinámicas.
- Validar el modelo comparando los resultados obtenidos por el modelo implementado en *MATLAB* con datos experimentales conocidos de un ensayo de flexión en tres puntos de una viga de tipo laminado.

Una vez validado el modelo se realizarán los siguientes estudios:

- Se aplicará el modelo a un caso particular, analizando las diferencias con el caso estático equivalente en función de parámetros geométricos y secuencia de apilamiento.
- Se estudiará la influencia de la velocidad de aplicación de las cargas en los valores de desplazamiento vertical máximo y valor del coeficiente del criterio de rotura.

1.3. Estructura del proyecto

La primera parte de este trabajo describe en el capítulo 2 el desarrollo teórico necesario para calcular el estado tensional de las vigas de material compuesto sometidas a cargas exteriores dinámicas que generan esfuerzos de flexión.

La sección 2.2 describe la teoría clásica del laminado, que considera los esfuerzos axiles y flectores a los que esta sometida la viga y proporciona tensiones y deformaciones para las láminas. Se introducirán además las ecuaciones que proporciona la teoría de elasticidad y resistencia de materiales para calcular los esfuerzos y desplazamientos frente a cargas exteriores estáticas en vigas de tipo Euler-Bernoulli.

En la sección 2.3 se describirá la teoría de cortadura de primer orden que proporciona las tensiones y deformaciones presentes en las vigas, considerando además de los esfuerzos axiles y flectores, los esfuerzos cortantes interlaminares. Se deducirán las ecuaciones del movimiento de una viga tipo Timoshenko y se considerarán las condiciones de contorno a aplicar a vigas de este tipo. Mediante el método de separación de variables y el análisis modal se deducirán la solución a las ecuaciones, obteniendo así las expresiones de los desplazamientos para vigas biapoyadas y en voladizo sometidas a cargas externas variables con el tiempo.

Seguidamente se introducirá el concepto de factor de corrección de cortadura y se calcularán los parámetros globales E_x y G_{zx} del laminado.

A continuación se presentará una introducción general a los criterios de rotura y se describirá el criterio de rotura de Tsai-Hill que se aplicará posteriormente para comprobar si una lamina rompe o no por efecto de las tensiones a las que está sometida.

En la segunda parte del trabajo, una vez conocidas las herramientas teóricas necesarias, se procederá a desarrollar el modelo matemático que de a conocer el estado tensional de la viga. Se particularizará el modelo para la configuración de viga biapoyada sometida a una carga puntual, y se describirán los pasos que se deben implementar en un software informático para obtener un modelo funcional, que permita analizar el estado tensional de la viga dependiendo de su secuencia de apilamiento, geometría, etc.

Se dividirá el modelo matemático simplificado en dos. El primer modelo considerará las cargas exteriores de tipo dinámico, empleando la teoría de cortadura para cal-

cular los parámetros globales del laminado y relacionar esfuerzos, tensiones y deformaciones. Los desplazamientos dinámicos serán calculados mediante las ecuaciones de Timoshenko resueltas en el capítulo anterior. El segundo modelo comprenderá la aproximación clásica para un problema estático y será utilizado para realizar comparaciones con el modelo dinámico objeto de este trabajo. Utilizará la teoría clásica del laminado y las ecuaciones de Euler-Bernoulli para calcular los desplazamientos de la viga.

En el Anexo I se incluirá el código informático implementado en *MATLAB* para la configuración de viga biapoyada sometida a una carga puntual dinámica.

A continuación se procederá a la validación del programa obtenido. Para ello se compararán los resultados proporcionados por el modelo simplificado con datos experimentales de un ensayo de impacto a flexión en tres puntos en probetas de tipo laminado realizado en los laboratorios de la universidad.

Una vez validado el modelo se estudiará la influencia de la geometría y la secuencia de apilamiento en los desplazamientos de la viga. A continuación será analizada la influencia de la velocidad de aplicación de la carga exterior en los desplazamientos y los valores del coeficiente de rotura.

Se concluirá con un ejemplo de aplicación a un caso particular de viga biapoyada sometida a una carga puntual dinámica en su sección central que permita introducir y describir los resultados que proporciona el modelo simplificado implementado en *MATLAB*, objeto del presente trabajo.

Capítulo 2

Desarrollo teórico

2.1. Materiales compuestos

Los materiales compuestos tradicionalmente usados en industrias de alta tecnología, han ido incorporándose con fuerza dentro de muchas aplicaciones como por ejemplo en la industria del automóvil, en la fabricación de pequeños barcos, como material base de conducciones y contenedores de fluidos, en los objetos deportivos, en la rehabilitación de edificios, etc.

Las características especiales que tiene el proceso de diseño estructural de piezas en materiales compuestos es un factor adicional que ha limitado su generalización. El diseño de un nuevo elemento de material compuesto no sólo pasa por idear la geometría del elemento, también requiere diseñar la configuración el propio material. Tradicionalmente se realizaba esta tarea con métodos basados en parte en datos empíricos dado que el conocimiento teórico del comportamiento de este tipo de materiales era reducido. Sin embargo, dado que las posibilidades de obtener materiales compuestos distintos son prácticamente ilimitadas, la caracterización con ensayos sobre el propio material es muy costosa y difícilmente generalizable o extrapolable a distintas configuraciones. Por lo tanto, esta dependencia de la experimentación frenó, en parte, la extensión en el uso de los compuestos en aplicaciones más corrientes hasta que se fue estableciendo mejor su conocimiento teórico.

El uso de modelos matemáticos simplificados, como el que se pretende realizar en este trabajo, y la simulación de estos mediante métodos numéricos parece ser un buen

camino para lograr avanzar en este conocimiento y para predecir el comportamiento de los elementos de material compuesto.

Se conoce como materiales compuestos a aquellos que son una combinación de dos o más materiales que se diferencian en función, forma o composición a escala macroscópica. Las fases mantienen sus identidades, es decir, no se disuelven o se mezclan completamente. Normalmente las fases pueden ser distinguidas físicamente y es posible identificar la interfase entre una y la otra. Asimismo, si los materiales compuestos son usados por sus peculiares propiedades estructurales, la definición de materiales compuestos se puede restringir a aquellos en los que una sustancia componente es el refuerzo (conocido por fibra o partícula) soportado por la otra fase que actúa como material aglutinante (conocido como matriz). La combinación de diferentes matrices (normalmente se usan polímeros o metales ligeros) con distintos materiales o disposiciones de fibra (fibra de vidrio, de carbono, orgánicas o de polímeros entre otras) permite conseguir materiales con propiedades mecánicas muy especiales que se adaptan a los distintos aspectos que requiere un determinado diseño.

Existe pues una gran cantidad de combinaciones posibles y, por lo tanto, muchos tipos de compuestos. Se pueden distinguir en función de su tipología (fibras cortas o largas, continuas o discontinuas, orientadas o con disposición aleatoria, una sola capa o laminados multicapa, etc.), o bien en función del tipo de sustancias componentes. Normalmente estos compuestos se presentan en forma de laminados unidireccionales (todo el refuerzo en una misma dirección) o en laminados bidimensionales (láminas apiladas con el refuerzo en distintas orientaciones). En este trabajo se estudiará el comportamiento de vigas compuestas de láminas unidireccionales sometidas a flexión.

Los laminados se forman a partir del apilamiento de láminas, donde las principales configuraciones son:

- Laminado unidireccional, se forma al apilar láminas unidireccionales con las fibras orientadas en la misma dirección.
- Laminados 0/90, se fabrican a partir del apilamiento de láminas unidireccionales en dos direcciones ortogonales, cuya principal característica es su comportamiento ortótropo.

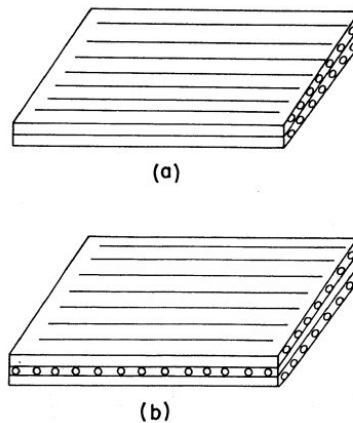


Figura 2.1: Ejemplo de dos secuencias de apilamiento (a) Laminado unidireccional (0°), (b) Laminado cruzado ($0/90^\circ$)

- Laminados cuasi-isótropos, están fabricados a partir de laminas unidireccionales orientadas en las direcciones 0° , 90° y $\pm 45^\circ$. Sus propiedades son aproximadamente las mismas en todas las direcciones debido a las diferentes orientaciones de cada lámina.

Las propiedades estructurales efectivas o globales que se obtienen en un material compuesto son la adición de contribuciones de sus distintas sustancias componentes y de su configuración. De forma que las propiedades mecánicas del compuesto final dependen en parte tanto de las propias propiedades de los constituyentes como de la disposición geométrica de éstos. Las fibras son las responsables de las buenas propiedades estructurales de los materiales compuestos. Sobre todo logran que el material compuesto tenga unas elevadas propiedades específicas de rigidez y resistencia en su dirección longitudinal. La matriz es el material aglutinante que permite a las fibras trabajar de forma conjunta transmitiendo los esfuerzos de unas a otras. Las matrices de polímero tienen como principales limitaciones la pérdida de propiedades a alta temperatura, su susceptibilidad medioambiental (son afectadas por la humedad, las radiaciones, etc.) y la baja resistencia a esfuerzos cortantes.

Las propiedades de los laminados están limitadas por las propiedades ortótropas de las láminas unidireccionales. En los laminados unidireccionales se consiguen los valores extremos de rigidez y resistencia para una matriz y fibra concreta en una determinada proporción volumétrica. La dirección del refuerzo (conocida como dirección 1 ó a 0°) exhibe los valores máximos y la perpendicular a ella (conocida

como dirección 2 ó a 90°) los valores mínimos.

Por lo tanto, uno de los primeros pasos es conocer el comportamiento del propio compuesto ya que se trata de un material altamente heterogéneo. Una de las dificultades en su análisis es la determinación de las propiedades globales, también llamadas efectivas (módulos elásticos o de rigidez, etc.) a partir de las propiedades de sus constituyentes. Los modelos macromecánicos estudian el compuesto a partir de propiedades efectivas. De este modo es posible estudiar el comportamiento global del compuesto a través de un material homogéneo equivalente.

Tradicionalmente, la simulación del comportamiento elástico de laminados se ha llevado a término mediante lo que se conoce como teoría de laminados. De hecho a este tipo de enfoque se le puede considerar un modelo cuasi-macromecánico donde se analiza el comportamiento del laminado suponiendo cada lámina como un sólido de características mecánicas homogéneas, generalmente anisótropas. Las propiedades mecánicas efectivas de las láminas se pueden obtener a partir de teorías como la regla de mezclas clásicas, mediante modelos micromecánicos más evolucionados o bien a partir de ensayos experimentales con probetas sencillas.

La teoría clásica del laminado impone compatibilidad cinemática entre todas las láminas teniendo en cuenta su posición en el laminado y su grosor. Cualquier deformación del laminado se desglosa en una deformación plana más una deformación de curvatura, asumiendo que el laminado es suficientemente delgado para que el radio de curvatura sea el mismo para todas sus láminas. La teoría clásica del laminado proporciona, en general, buenos resultados en el campo elástico y para esfuerzos de tracción siempre y cuando el laminado sea lo suficientemente esbelto. En caso contrario deben utilizarse modelos de orden superior como la teoría de cortadura de primer orden que considera las tensiones de cortadura a lo largo del espesor, no tenidas en cuenta en la teoría del laminado, y las fuerzas de inercia a las que esta sometido éste.

2.2. Teoría clásica del laminado

La teoría clásica del laminado extiende la teoría de elasticidad y resistencia de materiales a vigas formadas por láminas de materiales compuestos. Se basa en las hipótesis de Kirchhoff:

1. Las rectas perpendiculares al plano medio, antes de que el laminado se deforme, siguen permaneciendo rectas una vez que el laminado se haya deformado.
2. Las rectas perpendiculares al plano medio no experimentan ningún tipo de deformación longitudinal (el laminado no cambia de espesor).
3. Las rectas perpendiculares al plano medio permanecen perpendiculares a la superficie que adquiere dicho plano una vez que el laminado flecte.

Por tanto, las secciones planas ortogonales al plano medio del laminado siguen siendo planas y ortogonales a la superficie que adquiere dicho plano una vez que el laminado haya flectado.

Además de las hipótesis de Kirchoff, la teoría del laminado considera también las siguientes hipótesis.

- El comportamiento del material se supone elástico lineal.
- Las láminas se encuentran trabajando solidariamente unas con otras.
- No existen tensiones fuera del plano de cada lámina ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$), es decir las láminas trabajan en condiciones de tensión plana.

Por lo tanto la teoría clásica del laminado considera que una viga de material compuesto se comporta como una viga de Euler- Bernoulli, sin considerar las tensiones de cortadura entre láminas.

Asumiendo este conjunto de hipótesis la teoría del laminado proporciona el siguiente campo de desplazamientos.

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Donde u , v , w representan los desplazamientos a lo largo de las coordenadas x , y , z respectivamente.

De la tercera hipótesis de Kirchoff se deduce que el giro que experimenta el plano medio de la viga (α_x) es por tanto igual al giro de la sección plana perpendicular al plano medio (ϕ_x), como puede observarse en la figura 2.2

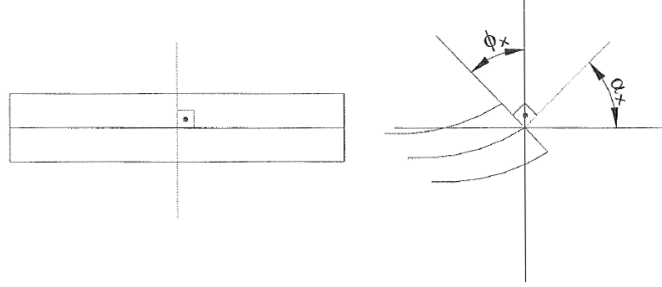


Figura 2.2: Giro de una sección según la teoría clásica del laminado

Conocido el campo de desplazamientos es sencillo conocer el campo de deformaciones

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
 \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0 \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0 \\
 \varepsilon_{zz} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Estas deformaciones pueden dividirse en deformaciones planas $\varepsilon^{(0)}$, causadas por esfuerzos axiales y las deformaciones asociadas a los giros $\varepsilon^{(1)}$, producidas por los esfuerzos flectores.

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)} \tag{2.3}$$

Siendo estas deformaciones:

$$\varepsilon^{(0)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\varepsilon^{(1)} = z \cdot \{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = z \cdot \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Donde z representa la coordenada z del laminado, con el origen de coordenadas situado en el plano medio de laminado. Desarrollando la teoría del laminado, partiendo de estas deformaciones, se llega a la ecuación constitutiva de una lámina.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Siendo la matriz \bar{Q} la matriz de rigidez de la lámina en ejes globales, que se obtiene al aplicar un cambio de base a la matriz de rigidez Q en ejes locales, y cuyas componentes se calculan a partir de las propiedades elásticas del material.

$$\{Q\} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Es conocida por tanto la ecuación constitutiva de una lámina y como calcular la matriz de rigidez a través de las componentes elásticas de la misma. Se hace necesario pues conocer una matriz que relacione todas las laminas presentes en el laminado

y los esfuerzos a los que la viga está sometida. Para ello es posible expresar los esfuerzos en función de las tensiones del siguiente modo

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \\ \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z \cdot dz \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ahora es posible relacionar los esfuerzos a los que esta sometida la viga con las deformaciones experimentadas. Para ello es necesario integrar a lo largo del espesor del laminado las ecuaciones (2.9) haciendo uso de la ecuación constitutiva (2.6).

$$\begin{aligned} \{N\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{ \sigma \} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \{\bar{Q}\}(\varepsilon^{(0)} + z \{ \kappa \}) dz \\ \{M\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{ \sigma \} z \cdot dz = \int_{-h/2}^{h/2} \{\bar{Q}\}(\varepsilon^{(0)} + z \{ \kappa \}) z dz \end{aligned} \quad (2.10)$$

Finalmente se obtienen tres nuevas matrices, la matriz de rigidez plana A , la matriz de rigidez a flexión D y la matriz de acoplamiento B , que relacionan los esfuerzos axiales y flectores con las deformaciones planas y los giros.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Las matrices A , B , D , tienen los siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \\
B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^2 - z_k^2) \\
D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Siendo z_k la coordenada z de la cara inferior de la lamina k .

Para laminados simétricos respecto a su plano medio la matriz de acoplamiento B es idénticamente nula. En los capítulos sucesivos utilizaremos este tipo de laminados para aprovechar esta condición. El uso real de este tipo de laminados está ampliamente extendido porque evitan que aparezcan deformaciones y tensiones residuales durante su fabricación.

2.2.1. Ecuaciones del movimiento viga Euler - Bernoulli.

La teoría de elasticidad y resistencia de materiales proporciona los esfuerzos y desplazamientos asociados que experimentan vigas isótropas sometidas a cargas externas constantes a través de las ecuaciones de Euler - Bernoulli. La teoría clásica del laminado permite hacer uso de estas ecuaciones introduciendo en las mismas un módulo de elasticidad a flexión E_x generalizado y representativo del laminado. El cálculo del módulo de elasticidad generalizado se describe en el apartado 2.4.

A continuación se detallan las ecuaciones para vigas simplemente apoyadas y en voladizo sometidas a cargas puntuales y distribuidas que se utilizarán en el siguiente capítulo.

2.2.1.1. Viga biapoyada sometida a una carga puntual en su punto medio.

El desplazamiento vertical en una viga como la de la figura 2.3 viene determinado por:

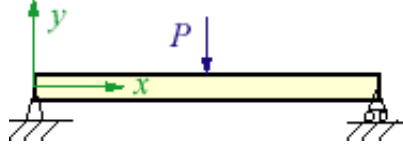


Figura 2.3: Viga biapoyada con carga puntual.

$$w(x) = \begin{cases} -\frac{Px(3L^2-4x^2)}{48EI} & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{P(L-x)(L^2-8x+4x^2)}{48EI} & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases} \quad (2.13)$$

$$w_{max} = w\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{PL^3}{48EI} \quad (2.14)$$

Las ecuaciones correspondientes al giro sufrido por las secciones de la viga son:

$$\phi(x) = \begin{cases} -\frac{Px(L^2-4x^2)}{16EI} & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{P(3L-2x)(2x-L)}{16EI} & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\phi_{max} = \phi(0 \& L) = \pm \frac{PL^2}{16EI} \quad (2.16)$$

El momento y la tensión máxima que determina la carga puntual P son:

$$M(x) = \begin{cases} -\frac{Px}{2} & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{P(L-x)}{2} & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases} \quad (2.17)$$

$$M_{max} = M\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{PL}{4} \quad (2.18)$$

$$\sigma_{max} = |M_{max}| \frac{c}{I} = \left| \frac{PLc}{4I} \right| \quad (2.19)$$

donde c es la distancia de la fibra neutra hasta el extremo mas alejado el espesor del laminado.

El cortante que experimenta la viga por la aplicación de la carga P en su punto medio es:

$$Q(x) = \begin{cases} -\frac{P}{2} & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{P}{2} & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases} \quad (2.20)$$

$$Q_{max} = \pm \frac{P}{2} \quad (2.21)$$

2.2.1.2. Viga biapoyada sometida a una carga distribuida.

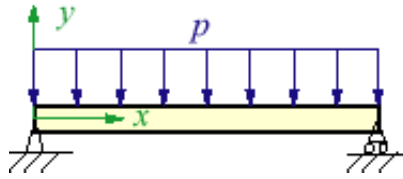


Figura 2.4: Viga biapoyada con carga distribuida.

$$w(x) = -\frac{px(L^3 - 2x^2L + x^3)}{24EI} \quad (2.22)$$

$$w_{max} = w\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{5pL^4}{384EI} \quad (2.23)$$

$$\phi(x) = -\frac{p(L^3 - 6x^2L + 4x^3)}{24EI} \quad (2.24)$$

$$\phi_{max} = \phi(0 \& L) = \pm \frac{pL^3}{24EI} \quad (2.25)$$

$$M(x) = -\frac{1}{2}p(L - x) \quad (2.26)$$

$$M_{max} = M\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{pL^2}{8} \quad (2.27)$$

$$\sigma_{max} = |M_{max}| \frac{c}{I} = \left| \frac{pL^2c}{8I} \right| \quad (2.28)$$

$$Q(x) = -\frac{1}{2}p(L - 2x) \quad (2.29)$$

$$Q_{max} = Q(0 \& L) = \pm \frac{pL}{2} \quad (2.30)$$

2.2.1.3. Viga en voladizo sometida a una carga puntual en su extremo.

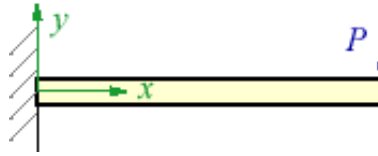


Figura 2.5: Viga en voladizo con carga puntual.

$$w(x) = -\frac{Px^2(3L - x)}{6EI} \quad (2.31)$$

$$w_{max} = w\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{PL^3}{3EI} \quad (2.32)$$

$$\phi(x) = -\frac{P(2L - x)x}{2EI} \quad (2.33)$$

$$\phi_{max} = \phi(0) = -\frac{PL^2}{2EI} \quad (2.34)$$

$$M(x) = P(L - x) \quad (2.35)$$

$$M_{max} = M(0) = PL \quad (2.36)$$

$$\sigma_{max} = |M_{max}| \frac{c}{I} = \left| \frac{PLc}{I} \right| \quad (2.37)$$

$$Q(x) = -P \quad (2.38)$$

$$Q_{max} = Q(x) = -P \quad (2.39)$$

2.2.1.4. Viga en voladizo sometida a una carga distribuida.

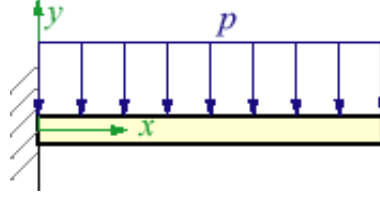


Figura 2.6: Viga en voladizo con carga distribuida.

$$w(x) = -\frac{px^2(6L^2 - 4xL + x^2)}{24EI} \quad (2.40)$$

$$w_{max} = w\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{pL^4}{8EI} \quad (2.41)$$

$$\phi(x) = -\frac{px(3L^2 - 3xL + x^2)}{6EI} \quad (2.42)$$

$$\phi_{max} = \phi(L) = -\frac{pL^3}{6EI} \quad (2.43)$$

$$M(x) = \frac{1}{2}p(L - x)^2 \quad (2.44)$$

$$M_{max} = M(0) = \frac{pL^2}{2} \quad (2.45)$$

$$\sigma_{max} = |M_{max}| \frac{c}{I} = \left| \frac{pL^2 c}{2I} \right| \quad (2.46)$$

$$Q(x) = -p(L - x) \quad (2.47)$$

$$Q_{max} = Q(0) = -pL \quad (2.48)$$

2.3. Teoría de cortadura de primer orden.

La teoría de cortadura de primer orden puede considerarse una extensión de la teoría clásica del laminado. Se basa en la asunción de que una viga de material compuesto se comporta como una viga tipo Timoshenko, teniendo en cuenta las tensiones de cortadura transversales.

La teoría de cortadura de primer orden asume las dos primeras hipótesis de Kirchoff, pero no la tercera. Como resultado el giro de la sección plana de la viga ya no es igual al giro experimentado por el plano medio, ya que se debe incluir el efecto de la cortadura γ_{xz} como puede observarse en la figura 2.7.

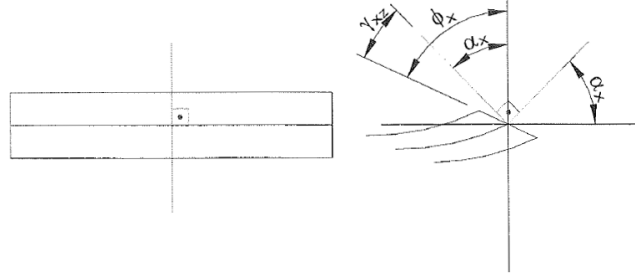


Figura 2.7: Giro de una sección según la teoría de cortadura de primer orden

El campo de desplazamientos queda por tanto como sigue

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Y el campo de deformaciones considerando las deformaciones transversales y el giro

debido a las tensiones de cortadura es

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\
 \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\
 \gamma_{xz} &= \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - \phi_x \right) \\
 \gamma_{yz} &= \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} - \phi_y \right) \\
 \varepsilon_{zz} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Al igual que en la teoría clásica del laminado, las deformaciones pueden dividirse en deformaciones planas $\varepsilon^{(0)}$, causadas por esfuerzos axiles y las deformaciones asociadas a los giros $\varepsilon^{(1)} = z \{\kappa\}$, producidas por los esfuerzos flectores.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} - \phi_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} - \phi_y \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.51}$$

De nuevo como en la teoría clásica se pueden relacionar los esfuerzos con las tensiones en cada lamina, ahora además aparecen dos nuevos esfuerzos cortantes ya que en la teoría de cortadura de primer orden las tensiones τ_{yz}, τ_{xz} ya no son nulas.

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz \tag{2.52}$$

Es necesaria por tanto una nueva relación constitutiva que relacione las tensiones de cortadura y las deformaciones producidas

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{2.53}$$

En (2.53) la matriz \bar{Q} para una lamina está expresada en ejes globales, se obtiene al aplicar un cambio de base a la matriz de rigidez Q en ejes locales, y cuyas componentes se calculan a partir de las propiedades elásticas del material.

$$\{Q\} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} Q_{44} &= G_{23} \\ Q_{55} &= G_{13} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Además de los esfuerzos que considera la teoría clásica del laminado la teoría de cortadura considera los esfuerzos de cortadura interlaminares. Para ello es necesario integrar a lo largo del espesor del laminado las ecuaciones (2.52) haciendo uso de la ecuación constitutiva (2.53) para las tensiones de cortadura.

$$\{Q\} = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \tau \right\} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \{\bar{Q}\}(\gamma) dz \quad (2.56)$$

Aparece así una nueva matriz C de rigidez a cortadura que relaciona esfuerzos cortantes y las deformaciones asociadas en el la viga de tipo laminado.

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

Las componentes de la matriz C se calculan como las componentes de la matriz de rigidez a esfuerzos longitudinales A

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k), \quad i, j = 4, 5 \quad (2.58)$$

La teoría de resistencia de materiales para una viga de material isótropo y de sección rectangular predice una ley para las tensiones de cortadura (2.59) de tipo cuadrático,

mientras que la teoría de cortadura de primer orden considera tensiones tangenciales constantes (2.60) a lo largo del espesor de la viga. Para compensar esta ampliación se introduce un coeficiente de corrección K que minora el área real a efectos de cortadura.

$$\tau^r = \frac{3Q}{2A} \left(1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right) \quad (2.59)$$

$$\tau^c = \frac{Q}{KA} \quad (2.60)$$

Para aplicar esta corrección a la teoría de cortadura se han de modificar las ecuaciones (2.52), (2.56) y (2.57) para que incluyan el factor de corrección K .

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz \quad (2.61)$$

$$\{Q\} = K \int_{-h/2}^{h/2} \{ \tau \} dz = k \int_{-h/2}^{h/2} \{\bar{Q}\}(\gamma) dz \quad (2.62)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.63)$$

2.3.1. Cálculo del coeficiente de corrección de cortadura

En la literatura relacionada se encuentran diferentes métodos para el calculo del factor de cortante K como el método clásico de Timoshenko y el método de Madabhushi-Raman y Davalos.

2.3.1.1. Método clásico de Timoshenko

Muchos investigadores aceptan que el factor de corrección de cortadura para materiales isótropos y homogéneos de sección rectangular se puede emplear también en

materiales de tipo laminado [11, 16, 18]. Se asumirá esta proposición como válida y se empleará este método en el modelo simplificado que se desarrollará en el capítulo siguiente.

El valor del coeficiente de cortadura se obtiene de igualar la energía de deformación calculada con la teoría de resistencia de materiales (2.64) con la energía de deformación debida a las tensiones constantes de la teoría de cortadura (2.65) multiplicadas por el factor buscado K .

$$U = \frac{1}{2G} \int (\tau^r)^2 dA = \frac{3Q^2}{5GA} \quad (2.64)$$

$$U = \frac{1}{2G} \int (\tau^c)^2 dA = \frac{Q^2}{2GkA} \quad (2.65)$$

Igualando ambas expresiones obtenemos el valor del factor de corrección para una sección de tipo rectangular, siendo el valor del mismo:

$$K = \frac{5}{6} \quad (2.66)$$

2.3.1.2. Método de Madabhusi-Raman y Davalos

Existen métodos específicos, más complejos, del calculo del factor de corrección de cortadura para materiales laminados. Como ejemplo se describe el método propuesto por Madabhusi-Raman y Davalos [13] que tiene en cuenta las propiedades elásticas y la orientación de las láminas. La matriz de rigidez del laminado a cortadura del método tiene en cuenta diferentes factores de corrección en cada una de las direcciones:

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1^2 C_{11} & K_1 K_2 C_{12} \\ K_1 K_2 C_{12} & K_2^2 C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.67)$$

La ecuación que relaciona la deformación angular interlaminar con el esfuerzo de cortadura es:

$$\gamma_{xz} = \frac{Q_y}{K_1^2 \left(C_{22} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}} \right)} = \frac{Q_y}{K \cdot \bar{F}} \quad (2.68)$$

donde

$$\begin{aligned} K &= K_1^2 \\ \bar{F} &= \left(C_{22} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}} \right) \end{aligned} \quad (2.69)$$

Para determinar el valor del coeficiente de corrección de cortadura K , se calcula en primer lugar la energía de deformación de cortadura debida a las tensiones de cortadura obtenidas realizando un equilibrio de esfuerzos y después se iguala a la energía equivalente obtenida a través de la ecuación constitutiva del laminado (2.67), en la que se asume que la deformación de cortadura es constante a lo largo del espesor.

La ecuación de equilibrio interno en el plano xz , suponiendo que no existen fuerzas de volumen es:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2.70)$$

Integrando a lo largo del espesor en la coordenada z :

$$\sigma_{xz} = \int_{-h/2}^z \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz \quad (2.71)$$

Sustituyendo σ_x por el valor que resulta de la ecuación constitutiva (2.6) y en función de los esfuerzos a través de las ecuaciones (2.11) y (2.12), se puede expresar la tensión de cortadura interlaminar en función del esfuerzo de cortadura, de las cortantes de rigidez del laminado y de la coordenada vertical z

$$\sigma_{xz} = \int_{-h/2}^z Q_{y,z} \cdot (\bar{Q}_{11} d_{11} + \bar{Q}_{12} d_{12} + \bar{Q}_{16} d_{16}) dz \quad (2.72)$$

La energía de deformación producida por las tensiones de cortadura es:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} \gamma_{xz} dz = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_{xz}^2}{\left(\bar{Q}_{55} - \frac{\bar{Q}_{45}^2}{\bar{Q}_{44}}\right)} dz \quad (2.73)$$

Sustituyendo la ecuación (2.72) en (2.73) se obtiene la energía de deformación según el equilibrio de esfuerzos en el plano xz

$$U_{ef} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Q_y^2 \left[\int_{-h/2}^z z \cdot (\bar{Q}_{11} d_{11} + \bar{Q}_{12} d_{12} + \bar{Q}_{16} d_{16}) dz \right]^2}{\left(\bar{Q}_{55} - \frac{\bar{Q}_{45}^2}{\bar{Q}_{44}}\right)} dz \quad (2.74)$$

Por otro lado la energía de deformación según la teoría de cortadura de primer orden es:

$$U_{tc} = \frac{1}{2} \frac{Q_y^2}{K \left(C_{22} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}} \right)} \quad (2.75)$$

Igualando ambas expresiones de energía de deformación se obtiene el valor del coeficiente de corrección de cortadura:

$$K = \left[\left(C_{22} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}} \right) \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\left[\int_{-h/2}^z z \cdot (\bar{Q}_{11} d_{11} + \bar{Q}_{12} d_{12} + \bar{Q}_{16} d_{16}) dz \right]^2}{\left(\bar{Q}_{55} - \frac{\bar{Q}_{45}^2}{\bar{Q}_{44}}\right)} dz \right]^{-1} \quad (2.76)$$

Integrando lámina a lámina a lo largo de espesor se puede expresar el resultado en forma de sumatorios

$$K = \left[\left(C_{22} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}} \right) \sum_{i=1}^{2N} \frac{1}{\left(\bar{Q}_{55}^i - \frac{(\bar{Q}_{45}^i)^2}{\bar{Q}_{44}^i}\right)} \left[P_i (z_{i+1} - z_i) + \frac{V_i}{3} (z_{i+1}^3 - z_i^3) + \frac{X_i}{5} (z_{i+1}^5 - z_i^5) \right] \right]^{-1} \quad (2.77)$$

donde

$$\begin{aligned}
 P_i &= U_i^2 + \frac{J_i^2 z_i^4}{4} + U_i J_i z_i^2 \\
 V_i &= U_i J_i + \frac{J_i^2 z_i^2}{4} \\
 X_i &= \frac{J_i^2}{4} \\
 U_i &= \sum_{m=1}^{i-1} \frac{J_m}{2} (z_{m+1}^2 - z_m^2) \\
 J_i &= \bar{Q}_{11}^i d_{11} + \bar{Q}_{12}^i d_{12} + \bar{Q}_{16}^i d_{16}
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

2.3.2. Ecuaciones del movimiento viga Timoshenko.

2.3.2.1. Deducción de las ecuaciones.

El giro total de una sección transversal de la viga ϕ_x puede dividirse en la componente debida a flexión $\alpha_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ y la componente debida a cortadura γ_x considerada en un viga de tipo Timoshenko (figura 2.7).

$$\gamma_x = \phi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.79}$$

Utilizando la resistencia de materiales y la relación (2.79) es fácilmente deducible la relación entre el momento flector M y el esfuerzo cortante Q con el giro ϕ y el desplazamiento w .

$$M = EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{2.80}$$

$$Q = KGA \left(\phi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \tag{2.81}$$

Las ecuaciones del movimiento para el elemento mostrado en la figura 2.8 se pueden obtener planteando las ecuaciones de equilibrio.

Para el desplazamiento en dirección z:

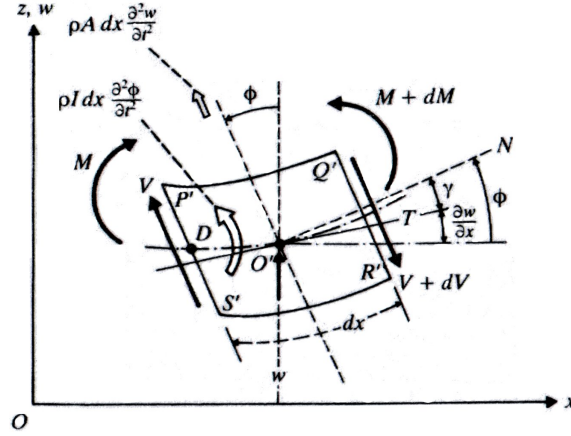


Figura 2.8: Esfuerzos actuantes en una sección de una viga Timoshenko

$$-[Q(x, t) + dQ(x, t)] + f(x, t)dx + Q(x, t) = \rho A dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.82)$$

Para el equilibrio de momentos en el eje x tomando como origen el punto D:

$$[M(x, t) + dM(x, t)] + [Q(x, t) + dQ(x, t)] dx + f(x, t)dx \frac{dx}{2} - M(x, t) = \rho I(x) dx \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.83)$$

Utilizando las relaciones

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx \quad (2.84)$$

$$dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx \quad (2.85)$$

junto con las ecuaciones (2.80) y (2.81) y despreciando los términos dx de segundo orden se pueden transformar las ecuaciones (2.82), (2.83) para obtener el sistema de ecuaciones del movimiento para una viga Timoshenko.

$$KGA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.86)$$

$$EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + KGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) = \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.87)$$

2.3.2.2. Condiciones de contorno.

En una viga de tipo Timoshenko no se pueden seguir utilizándose las condiciones de contorno clásicas, las condiciones de contorno que se deben aplicar por tanto son:

Para una viga biapoyada como la de la figura 2.9

$$EI \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad w = 0 \quad (2.88)$$

Condiciones que representan un momento flector y un desplazamiento vertical iguales a cero en los extremos de la viga.

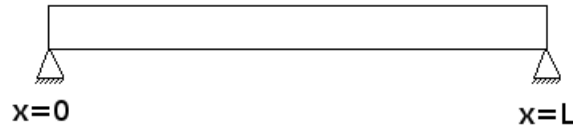


Figura 2.9: Condiciones de contorno. Viga biapoyada

Para una viga en voladizo como la de la figura 2.10 las condiciones de contorno para el extremo empotrado (2.89) y el extremo libre (2.90) respectivamente son:

$$\phi = 0, \quad w = 0 \quad (2.89)$$

$$EI \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad KGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) = 0 \quad (2.90)$$

El primer par de condiciones representan la ausencia de movimientos en el extremo empotrado. El segundo par representan un momento flector y un cortante nulos en el extremo libre.

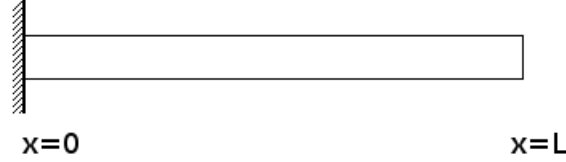


Figura 2.10: Condiciones de contorno. Viga en voladizo

2.3.2.3. Solución del movimiento libre o solución espacial.

El primer paso para hallar la solución a las ecuaciones de Timoshenko es resolver la ecuación homogénea, anulando la fuerza externa. Para ello primero es necesario desacoplar las ecuaciones y obtener una ecuación para el desplazamiento vertical w .

Derivando respecto a la coordenada x la ecuación (2.87) se obtiene:

$$EI \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + KGA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \rho I \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial t^2} \quad (2.91)$$

Substituyendo (2.91) en la ecuación (2.86)

$$\rho I \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial t^2} - EI \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.92)$$

Ahora no se tiene más que despejar el cociente $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ de (2.86) y derivarlo dos veces respecto al tiempo y dos veces respecto a x , y sustituir los resultados en (2.92) para obtener la ecuación para el desplazamiento vertical que se estaba buscando. Puede seguirse un desarrollo similar para obtener la ecuación desacoplada del ángulo girado ϕ debido al momento flector y al efecto de cortadura.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left(\frac{\rho}{E} + \frac{\rho}{KG} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\rho^2}{EKG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (2.93)$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - \left(\frac{\rho}{E} + \frac{\rho}{KG} \right) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\rho^2}{EKG} \frac{\partial^4 \phi}{\partial t^4} = 0 \quad (2.94)$$

Examinando (2.93) y (2.94) se puede observar que w y ϕ obedecen a ecuaciones

diferenciales idénticas, por lo que cabe esperar que sus soluciones $w(x, t)$ y $\phi(x, t)$ también sean de la misma forma.

El siguiente paso es aplicar el método de separación de variables, para ello se asume que $w(x, t)$ y $\phi(x, t)$ tienen la misma solución $T(t)$, es decir están sincronizadas en el tiempo. Por la tanto la forma de las soluciones es:

$$\begin{bmatrix} w(x, t) \\ \phi(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(x) \\ \varphi(x) \end{bmatrix} T(t) \quad (2.95)$$

Substituyendo las expresiones anteriores en las ecuaciones del movimiento de una viga Timoshenko (2.86) y (2.87), y anulando la fuerza externa se llega a:

$$\rho A W \ddot{T} - K A G (W'' - \varphi') T = 0 \quad (2.96)$$

$$\rho I \varphi \ddot{T} - E I \varphi'' T - K G A (W' - \varphi) T = 0 \quad (2.97)$$

La ecuación (2.96) puede descomponerse en dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad (2.98)$$

$$K A G (W'' - \varphi') + \omega^2 \rho A W = 0 \quad (2.99)$$

A su vez la ecuación (2.97) se descompone en:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad (2.100)$$

$$E I \varphi'' + K G A (W' - \varphi) + \omega^2 \rho I \varphi = 0 \quad (2.101)$$

Se puede observar que en ambos casos la ecuación temporal $T(t)$ presenta una solución de tipo sinusoidal con frecuencia natural ω , es decir:

$$T(t) = d_1 \sin(\omega t) + d_2 \cos(\omega t) \quad (2.102)$$

Las ecuaciones espaciales pueden escribirse en forma matricial resultando:

$$0 = \begin{bmatrix} KAG & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W'' \\ \varphi'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -KAG \\ KAG & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W' \\ \varphi' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega^2 \rho A & 0 \\ 0 & \omega^2 \rho I - KGA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

y desacoplando la ecuación (2.103) para las variables espaciales W y φ se llega a:

$$W^{iv} + W'' \left(\frac{\rho}{KG} + \frac{\rho}{E} \right) \omega^2 + W \left(\frac{-\omega^2 \rho A}{EI} + \frac{\omega^4 \rho^2}{E} \right) \quad (2.104)$$

$$\varphi^{iv} + \varphi'' \left(\frac{\rho}{KG} + \frac{\rho}{E} \right) \omega^2 + \varphi \left(\frac{-\omega^2 \rho A}{EI} + \frac{\omega^4 \rho^2}{E} \right) \quad (2.105)$$

Nótese que las ecuaciones diferenciales para $W(x, t)$ y $\varphi(x, t)$ tienen la misma forma, de tal modo que podemos asumir que las soluciones de $W(x, t)$ y $\varphi(x, t)$ tendrán también la misma forma y diferirán solo en una constante, siendo la forma de las mismas:

$$\begin{bmatrix} W(x, t) \\ \varphi(x, t) \end{bmatrix} = d u e^{rx} \quad (2.106)$$

donde d es una constante, u un vector constante y r es el número de onda correspondiente. Al substituir la solución (2.106) en la ecuación (2.103) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} KAGr^2 + \omega^2 \rho A & -KAGr \\ KAGr & EIr^2 + \omega^2 \rho I - KGA \end{bmatrix} u = 0 \quad (2.107)$$

De donde se pueden obtener los autovalores r y los autovectores u . Para evitar una solución trivial el determinante de la matriz anterior debe ser igual a cero, lo que conduce a la ecuación característica,

$$r^4 + r^2 \omega^2 \left(\frac{\rho}{E} + \frac{\rho}{KG} \right) - \frac{\rho A}{EI} \omega^2 + \frac{\rho^2}{KGE} \omega^4 = 0 \quad (2.108)$$

la cual permite obtener los autovalores r_i y los correspondientes autovectores u_i

$$r_i = \pm \sqrt{-\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{KG}\right) \frac{\omega^2 \rho}{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{E} - \frac{1}{KG}\right)^2 \frac{\omega^4 \rho^2}{4} + \frac{\rho A}{EI} \omega^2} \quad (2.109)$$

$$u_i = \begin{bmatrix} KGAr_i \\ KGAr_i^2 + \rho A\omega^2 \end{bmatrix} \text{ ó } \begin{bmatrix} EIr_i^2 + \omega^2\rho I - KG A \\ -KGAr_i \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

De las cuatro raíces r de la ecuación característica, las dos dadas por

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{-\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{KG}\right) \frac{\omega^2\rho}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{E} - \frac{1}{KG}\right)^2 \frac{\omega^4\rho^2}{4} + \frac{\rho A}{EI}\omega^2}} \quad (2.111)$$

son siempre imaginarias, y las otras dos raíces dadas por

$$r_{3,4} = \pm \sqrt{-\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{KG}\right) \frac{\omega^2\rho}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{E} - \frac{1}{KG}\right)^2 \frac{\omega^4\rho^2}{4} + \frac{\rho A}{EI}\omega^2}} \quad (2.112)$$

pueden ser o reales o imaginarias dependiendo de la frecuencia ω . Igualando el contenido del discriminante a cero se obtiene la frecuencia crítica, tal que $r_{3,4}$ son reales cuando la frecuencia es menor que la frecuencia crítica y $r_{3,4}$ son imaginarias cuando la frecuencia es mayor que la frecuencia crítica.

Siendo la expresión de la frecuencia crítica:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{KG A}{\rho I}} \quad (2.113)$$

La solución espacial es por tanto

$$\begin{bmatrix} W(x, t) \\ \varphi(x, t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 d u e^{r x} = d_1 u_1 e^{b x} + d_2 u_2 e^{-b x} + d_3 u_3 e^{i a x} + d_4 u_4 e^{-i a x} \quad (2.114)$$

siendo los números de onda a y b

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{KG}\right) \frac{\omega^2\rho}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{E} - \frac{1}{KG}\right)^2 \frac{\omega^4\rho^2}{4} + \frac{\rho A}{EI}\omega^2}} \\ b &= \sqrt{-\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{KG}\right) \frac{\omega^2\rho}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{E} - \frac{1}{KG}\right)^2 \frac{\omega^4\rho^2}{4} + \frac{\rho A}{EI}\omega^2}} \end{aligned} \quad (2.115)$$

Cuando $\omega < \omega_c$ la solución espacial se escribe en términos de funciones sinusoidales e hiperbólicas.

$$\begin{bmatrix} W(x, t) \\ \varphi(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \sin ax + \begin{bmatrix} C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \cos ax + \begin{bmatrix} C_3 \\ D_3 \end{bmatrix} \sinh bx + \begin{bmatrix} C_4 \\ D_4 \end{bmatrix} \cosh bx \quad (2.116)$$

Puede parecer que la solución espacial tiene ocho constantes desconocidas C_i y D_i en lugar de las cuatro constantes de la ecuación (2.114). Expresando la ecuación (2.114) en términos sinusoidales e hiperbólicos es posible relacionar los coeficientes C_i y D_i en función de los autovectores u_i ,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} &= (d_3 u_3 - d_4 u_4) i, & \begin{bmatrix} C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} &= (d_3 u_3 + d_4 u_4), \\ \begin{bmatrix} C_3 \\ D_3 \end{bmatrix} &= (d_1 u_1 - d_2 u_2), & \begin{bmatrix} C_4 \\ D_4 \end{bmatrix} &= (d_1 u_1 + d_2 u_2), \end{aligned} \quad (2.117)$$

Teniendo en cuenta que d_3 y d_4 son complejos conjugados el uno del otro se tiene que:

$$\begin{aligned} D_1 &= -\frac{KG A a^2 - \omega^2 \rho A}{KG A a} C_2 & D_2 &= \frac{KG A a^2 - \omega^2 \rho A}{KG A a} C_1 \\ D_3 &= \frac{KG A b^2 + \omega^2 \rho A}{KG A b} C_4 & D_4 &= \frac{KG A b^2 + \omega^2 \rho A}{KG A b} C_3 \end{aligned} \quad (2.118)$$

Por lo que se comprueba que se mantienen solo cuatro incógnitas C_i

Cuando $\omega > \omega_c$ la solución espacial puede escribirse solo en términos sinusoidales:

$$\begin{bmatrix} W(x, t) \\ \varphi(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{D}_1 \end{bmatrix} \sin ax + \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 \\ \tilde{D}_2 \end{bmatrix} \cos ax + \begin{bmatrix} \tilde{C}_3 \\ \tilde{D}_3 \end{bmatrix} \sin \tilde{b}x + \begin{bmatrix} \tilde{C}_4 \\ \tilde{D}_4 \end{bmatrix} \cos \tilde{b}x \quad (2.119)$$

donde a es el mismo que el la ecuación (2.115) y \tilde{b} es igual a

$$\tilde{b} = \sqrt{\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{KG}\right) \frac{\omega^2 \rho}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{E} - \frac{1}{KG}\right)^2 \frac{\omega^4 \rho^2}{4} + \frac{\rho A}{EI} \omega^2}} \quad (2.120)$$

Además \tilde{C}_i y \tilde{D}_i están relacionados por

$$\begin{aligned}\tilde{D}_1 &= -\frac{KG Aa^2 - \omega^2 \rho A}{KG Aa} \tilde{C}_2 & \tilde{D}_2 &= \frac{KG Aa^2 - \omega^2 \rho A}{KG Aa} \tilde{C}_1 \\ \tilde{D}_3 &= -\frac{KG Ab^2 - \omega^2 \rho A}{KG Ab} \tilde{C}_4 & \tilde{D}_4 &= \frac{KG Ab^2 - \omega^2 \rho A}{KG Ab} \tilde{C}_3\end{aligned}\quad (2.121)$$

Nótese que b y \tilde{b} están relacionados por

$$b = i\tilde{b} \quad (2.122)$$

Es posible relacionar la frecuencia crítica con los números de onda críticos, si se define el cociente $s = \sqrt{\frac{A}{I}}$ se puede escribir

$$\omega_c = s \sqrt{\frac{KG}{\rho}} \quad (2.123)$$

Sustituyendo esta expresión de ω_c en las ecuaciones (2.115) y (2.120), los números de onda críticos son

$$a_c = s \sqrt{\frac{KG}{E} + 1}, \quad b_c = \tilde{b}_c = 0 \quad (2.124)$$

Considerando la definición del modulo de cortante $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ se puede definir γ^2 , lo que permite reescribir el número de onda crítico como:

$$\gamma^2 = \frac{E}{KG} = \frac{2(1+\nu)}{K} \quad (2.125)$$

$$a_c = s \sqrt{\frac{KG}{E} + 1} = s \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + 1} \quad (2.126)$$

El coeficiente de corrección de cortadura de Timoshenko K depende de la sección de la viga y el coeficiente de Poisson ν del material de la misma, considerando que ambos presentan una variación muy pequeña se puede admitir que el número de onda crítico depende esencialmente del cociente s .

Puede demostrarse que el caso $\omega < \omega_c$ es equivalente al caso $a < a_c$. Para ello puede derivarse a con respecto a w en la relación de dispersión (2.115), comprobándose

que el signo de la derivada es siempre positivo, implicando que a es una función monótona creciente de w .

2.3.2.4. Frecuencias naturales y autofunciones

Hasta ahora se han obtenido las soluciones espaciales para el movimiento libre, con cuatro incógnitas cuando $\omega < \omega_c$ y cuando $\omega > \omega_c$ dadas por las ecuaciones (2.116) y (2.119). Además se han identificado las condiciones de contorno que deben satisfacer una viga biapoyada y una viga empotrada en uno de sus extremos y libre en el otro, definidas por las ecuaciones (2.88), (2.89) y (2.90).

El siguiente paso es aplicar las condiciones de contorno para intentar determinar las cuatro incógnitas presentes en la solución espacial. Una vez dado este paso se tendrá como resultado cuatro ecuaciones simultaneas, que relacionan las cuatro incógnitas que se quiere determinar, y que pueden representarse de manera simplificada como

$$[F]_{4 \times 4} \{C\}_{4 \times 1} = \{0\}_{4 \times 1} \quad (2.127)$$

Donde $\{C\}$ es el vector de coeficientes de la solución espacial y la matriz F contiene funciones sinusoidales e hiperbólicas evaluadas en los extremos de la viga. Para evitar una solución trivial el determinante de la matriz F debe ser idénticamente cero. En este punto lo mejor que se puede hacer es reducir el numero de incógnitas de cuatro a una.

La ecuación que se obtiene al igualar el determinante de F a cero es la ecuación de frecuencias, que tiene un número infinito de soluciones. Para cada solución los coeficientes C_i son únicos y solo difieren en una constante. Las soluciones que se obtienen serán los correspondientes números de onda, que pueden transformarse en frecuencias naturales usando las relaciones de dispersión (2.115) y (2.120). Las correspondientes soluciones espaciales son llamadas autofunciones.

Dado que las soluciones dependen de los números de onda a y b (a y \tilde{b} si $\omega > \omega_c$) es conveniente expresar uno en función de otro, para ello se debe comenzar definiendo

$$B_1 = \frac{\rho\omega^2}{2E}, \quad B_2 = \frac{\rho\omega^2}{2KG}, \quad B_3 = \frac{\rho A\omega^2}{EI} \quad (2.128)$$

De tal manera que las relaciones de dispersión (2.115) y (2.120) puedan reescribirse como

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(B_1 + B_2) + \sqrt{(B_1 - B_2)^2 + B_3}} \\ b &= \sqrt{-(B_1 + B_2) + \sqrt{(B_1 - B_2)^2 + B_3}} = i\tilde{b} \end{aligned} \quad (2.129)$$

Despejando B_1, B_2 y B_3 se obtiene:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{a^2 - b^2}{2(1 + \gamma^2)}, & B_2 &= \frac{\gamma^2(a^2 - b^2)}{2(1 + \gamma^2)}, \\ B_3 &= \frac{1}{4} \left\{ (a^2 + b^2)^2 - \frac{(1 - \gamma^2)^2}{(1 + \gamma^2)^2} (a^2 - b^2)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.130)$$

Donde γ es la constante expresada en la ecuación (2.125). Nótese que B_1, B_2 y B_3 pueden ser expresados en términos de a y \tilde{b} sin mas que remplazar b^2 por \tilde{b}^2 en la ecuación (2.130). Igualando el cociente entre B_3 y B_1 en las ecuaciones (2.128) y (2.130) se obtiene la relación entre los números de onda expresada por

$$\frac{(\gamma^2 b^2 + a^2)(\gamma^2 a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)(1 + \gamma^2)} = s^2 \quad (2.131)$$

De nuevo la relación entre a y \tilde{b} se puede obtener reemplazando b por $i\tilde{b}$ en la ecuación (2.131).

$$\frac{(-\gamma^2 \tilde{b}^2 + a^2)(\gamma^2 a^2 - \tilde{b}^2)}{(a^2 + \tilde{b}^2)(1 + \gamma^2)} = s^2 \quad (2.132)$$

De las ecuaciones (2.131) y (2.132) se deduce que los números de onda están relacionados por s y γ .

Usando las ecuaciones (2.128) y (2.130) es posible reescribir la ecuación (2.118) como

$$\begin{aligned} D_1 &= -\frac{a^2 + \gamma^2 b^2}{(1 + \gamma^2)a} C_2 & D_2 &= \frac{a^2 + \gamma^2 b^2}{(1 + \gamma^2)a} C_1 \\ D_3 &= \frac{b^2 + \gamma^2 a^2}{(1 + \gamma^2)b} C_4 & D_4 &= \frac{b^2 + \gamma^2 a^2}{(1 + \gamma^2)b} C_3 \end{aligned} \quad (2.133)$$

de manera que la solución espacial para $\omega < \omega_c$ puede escribirse solamente en términos dependientes de los números de onda. Del mismo modo usando las ecuaciones (2.128) y (2.130) y reemplazando b por $i\tilde{b}$, se comprueba que los coeficientes \tilde{C}_i y \tilde{D}_i de la ecuación (2.121) están relacionados por

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1 &= -\frac{a^2 - \gamma^2 \tilde{b}^2}{(1 + \gamma^2)a} \tilde{C}_2 & \tilde{D}_2 &= \frac{a^2 - \gamma^2 \tilde{b}^2}{(1 + \gamma^2)a} \tilde{C}_1 \\ \tilde{D}_3 &= -\frac{\tilde{b}^2 - \gamma^2 a^2}{(1 + \gamma^2)\tilde{b}} \tilde{C}_4 & \tilde{D}_4 &= \frac{\tilde{b}^2 - \gamma^2 a^2}{(1 + \gamma^2)\tilde{b}} \tilde{C}_3 \end{aligned} \quad (2.134)$$

expresiones que se pueden utilizar para expresar la solución de la ecuación espacial cuando $\omega > \omega_c$ solo en términos dependientes de los números de onda.

Tabla 2.1: Ecuación de frecuencias para una viga Timoshenko , $a < a_c$

viga biapoyada	$\sin aL \sinh bL = 0$
viga en voladizo	$(a^2 - b^2) \sin aL \sinh bL - ab \frac{(a^4 + a^4 \gamma^4 + 4\gamma^2 a^2 b^2 + b^4 \gamma^4 + b^4)}{(b^2 + \gamma^2 a^2)(a^2 + \gamma^2 b^2)} \cos aL \cosh bL - 2ab = 0$

Tabla 2.2: Ecuación de frecuencias para una viga Timoshenko , $a > a_c$

viga biapoyada	$\sin aL \sin \tilde{b}L = 0$
viga en voladizo	$(a^2 + \tilde{b}^2) \sin aL \sin \tilde{b}L - a\tilde{b} \frac{(a^4 + a^4 \gamma^4 - 4\gamma^2 a^2 \tilde{b}^2 + \tilde{b}^4 \gamma^4 + \tilde{b}^4)}{(-\tilde{b}^2 + \gamma^2 a^2)(a^2 - \gamma^2 \tilde{b}^2)} \cos aL \cos \tilde{b}L - 2a\tilde{b} = 0$

Solo es necesaria una ecuación de frecuencias, ya que una vez obtenida la frecuencia para el caso $a < a_c$, la frecuencia para el caso $a > a_c$ se obtiene reemplazando b por $i\tilde{b}$.

Las ecuaciones de frecuencias están tabuladas en la Tabla 2.1 para el caso $a < a_c$, y en la Tabla 2.2 para el caso $a > a_c$. Las ecuaciones de frecuencias dependen de a , b , (o \tilde{b}) y γ . De las ecuaciones (2.131) y (2.132) b (o \tilde{b}) se puede escribir como

una función que depende solo de a , s y γ . Por lo tanto las raíces de la ecuación de frecuencias a dependen solo de s y γ . Después de obtener las raíces a para s y γ dados, b (o \tilde{b}) se obtienen usando las relaciones (2.131) y (2.132)

Finalmente para obtener las frecuencias naturales que corresponden a cada par de números de onda se utiliza la expresión de B_1 en las ecuaciones (2.128) y (2.130), resultando ser:

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{E(a^2 - b^2)}{\rho(1 + \gamma^2)}} & \text{si } a < a_c \\ \omega &= \sqrt{\frac{E(a^2 + \tilde{b}^2)}{\rho(1 + \gamma^2)}} & \text{si } a > a_c\end{aligned}\quad (2.135)$$

A continuación se deben calcular los coeficientes C_i para cada tipo de viga, para el caso $a < a_c$ definiendo α y β

$$\alpha = \frac{a^2 + \gamma^2 b^2}{(1 + \gamma^2)a} \quad \beta = \frac{b^2 + \gamma^2 a^2}{(1 + \gamma^2)b} \quad (2.136)$$

se pueden escribir la solución a las ecuaciones espaciales como

$$\begin{bmatrix} W(x, t) \\ \varphi(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ -\alpha C_2 \end{bmatrix} \sin ax + \begin{bmatrix} C_2 \\ \alpha C_1 \end{bmatrix} \cos ax + \begin{bmatrix} C_3 \\ \beta C_4 \end{bmatrix} \sinh bx + \begin{bmatrix} C_4 \\ \beta C_3 \end{bmatrix} \cosh bx \quad (2.137)$$

aplicando las condiciones de contorno para una viga biapoyada se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha a & 0 & \beta b \\ \sin aL & \cos aL & \sinh bL & \cosh bL \\ -\alpha a \sin aL & -\alpha a \cos aL & \beta b \sinh bL & \beta b \cosh bL \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.138)$$

cuya solución es $C_2, C_3, C_4 = 0$ y $C_1 \sin aL = 0$, donde C_1 esta indeterminado y

$a = \frac{n\pi}{L}$, por lo tanto la solución a la ecuación espacial de una viga biapoyada cuando $a < a_c$ es

$$\begin{bmatrix} W(x, t) \\ \varphi(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \sin ax \\ \alpha C_1 \cos ax \end{bmatrix} \quad (2.139)$$

Repitiendo el proceso para $a > a_c$ y llamando $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ a

$$\tilde{\alpha} = \frac{a^2 - \gamma^2 \tilde{b}^2}{(1 + \gamma^2)a} \quad \tilde{\beta} = \frac{\tilde{b}^2 - \gamma^2 a^2}{(1 + \gamma^2)\tilde{b}} \quad (2.140)$$

es posible reescribir la ecuación espacial cuando $a > a_c$ como

$$\begin{bmatrix} W(x, t) \\ \varphi(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ -\tilde{\alpha}\tilde{C}_2 \end{bmatrix} \sin ax + \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 \\ \tilde{\alpha}\tilde{C}_1 \end{bmatrix} \cos ax + \begin{bmatrix} \tilde{C}_3 \\ -\tilde{\beta}\tilde{C}_4 \end{bmatrix} \sin \tilde{b}x + \begin{bmatrix} \tilde{C}_4 \\ \tilde{\beta}\tilde{C}_3 \end{bmatrix} \cos \tilde{b}x \quad (2.141)$$

Aplicando las ecuaciones de contorno y resolviendo el sistema se llega a la solución espacial de una viga biapoyada cuando $a > a_c$, siendo de nuevo $a = \frac{n\pi}{L}$.

$$\begin{bmatrix} W(x, t) \\ \varphi(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \sin ax \\ \tilde{\alpha}\tilde{C}_1 \cos ax \end{bmatrix} \quad (2.142)$$

Se puede hacer de nuevo uso de las ecuaciones (2.136), (2.137), (2.140) y (2.141) para hallar la solución de la ecuación espacial para una viga en voladizo. Para el caso $a < a_c$ el sistema de ecuaciones tras imponer las condiciones de contorno es el siguiente

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & \beta & 0 \\ -\alpha a \sin aL & -\alpha a \cos aL & \beta b \sinh bL & \beta b \cosh bL \\ (a - \alpha) \cos aL & -(a - \alpha) \sin aL & (b - \beta) \cosh bL & (b - \beta) \sinh bL \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.143)$$

Definiendo a_1, b_1, c_1 y d_1

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \alpha a \sin aL + \alpha b \sinh bL \\
 b_1 &= \alpha a \cos aL + \beta b \cosh bL \\
 c_1 &= (a - \alpha) \cos aL - \frac{\alpha}{\beta} (b - \beta) \cosh bL \\
 d_1 &= (a - \alpha) \sin aL + (b - \beta) \sinh bL
 \end{aligned} \tag{2.144}$$

se puede escribir los coeficientes C_i de la solución de la ecuación espacial (2.137) para una viga en voladizo cuando $a < a_c$. De nuevo resolviendo el sistema de ecuaciones se llega a $C_1(a_1d_1 + b_1c_1) = 0$, donde C_1 está indeterminado y desarrollando $(a_1d_1 + b_1c_1) = 0$ se llega a la ecuación de frecuencias de la tabla 2.1. El resto de coeficientes no son nulos en este caso y dependen de C_1

$$\begin{aligned}
 C_2 &= -\frac{a_1}{b_1} C_1 \\
 C_3 &= -\frac{\alpha}{\beta} C_1 \\
 C_4 &= \frac{a_1}{b_1} C_1
 \end{aligned} \tag{2.145}$$

Del mismo modo en el caso $a > a_c$ es posible resolver la ecuación espacial (2.141) haciendo uso de (2.140) y definiendo unos nuevos $\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \tilde{c}_1$ y \tilde{d}_1

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_1 &= -\tilde{\alpha} a \sin aL + \tilde{\alpha} \tilde{b} \sin \tilde{b}L \\
 \tilde{b}_1 &= -\tilde{\alpha} a \cos aL + \tilde{\beta} \tilde{b} \cos \tilde{b}L \\
 \tilde{c}_1 &= (a - \tilde{\alpha}) \cos aL - \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} (\tilde{b} - \tilde{\beta}) \cos \tilde{b}L \\
 \tilde{d}_1 &= (a - \tilde{\alpha}) \sin aL - (\tilde{b} - \tilde{\beta}) \sin \tilde{b}L
 \end{aligned} \tag{2.146}$$

Se obtiene de nuevo una expresión de la forma $\tilde{C}_1(\tilde{a}_1\tilde{d}_1 + \tilde{b}_1\tilde{c}_1) = 0$, donde \tilde{C}_1 está indeterminado y desarrollando $(\tilde{a}_1\tilde{d}_1 + \tilde{b}_1\tilde{c}_1) = 0$ se llega a la ecuación de frecuencias de la tabla 2.2. Como en el caso $a < a_c$ el resto de coeficientes no son nulos y dependen de \tilde{C}_1

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_2 &= -\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{b}_1} \tilde{C}_1 \\
 \tilde{C}_3 &= -\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} \tilde{C}_1 \\
 \tilde{C}_4 &= \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{b}_1} \tilde{C}_1
 \end{aligned} \tag{2.147}$$

La tabla 2.3 resume las soluciones espaciales para las viga biapoyada y en voladizo cuando la frecuencia natural es menor que la frecuencia crítica ($a < a_c$) y para el caso en que es mayor ($a > a_c$).

Tabla 2.3: Soluciones de la ecuación espacial

Viga biapoyada	
$\begin{bmatrix} W(x, t) \\ \varphi(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \sin ax \\ \alpha C_1 \cos ax \end{bmatrix}$	$a < a_c$
$\begin{bmatrix} W(x, t) \\ \varphi(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \sin ax \\ \tilde{\alpha} \tilde{C}_1 \cos ax \end{bmatrix}$	$a > a_c$
Viga en voladizo	
$\begin{bmatrix} W(x, t) \\ \varphi(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \left(\sin ax - \frac{a_1}{b_1} \cos ax - \frac{\alpha}{\beta} \sinh bx + \frac{a_1}{b_1} \cosh ax \right) \\ C_1 \left(\alpha \cos ax + \alpha \frac{a_1}{b_1} \sin ax - \alpha \cosh bx + \beta \frac{a_1}{b_1} \sinh bx \right) \end{bmatrix}$	$a < a_c$
$\begin{bmatrix} W(x, t) \\ \varphi(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \left(\sin ax - \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{b}_1} \cos ax - \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} \sin \tilde{b}x + \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{b}_1} \cos \tilde{b}x \right) \\ \tilde{C}_1 \left(\tilde{\alpha} \cos ax + \tilde{\alpha} \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{b}_1} \sin ax - \tilde{\alpha} \cos \tilde{b}x - \tilde{\beta} \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{b}_1} \sin \tilde{b}x \right) \end{bmatrix}$	$a > a_c$

2.3.2.5. Solución del movimiento forzado o solución temporal.

Para hallar la solución al movimiento forzado o solución temporal a las ecuaciones una viga Timoshenko primero se debe comprobar la ortogonalidad de las autofunciones o modos propios. El primer paso consiste en reescribir (2.103) como

$$L(\bar{W}_n) = \omega_n^2 M(\bar{W}_n) \quad (2.148)$$

donde $\bar{W}_n = \begin{pmatrix} W_n(x) \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$ y los operadores M y L son

$$L(\bar{W}_n) = \begin{bmatrix} KAG \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -KAG \frac{\partial}{\partial x} \\ KAG \frac{\partial}{\partial x} & (EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} - KAG) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_n \\ \varphi_n \end{pmatrix} \quad (2.149)$$

$$M(\bar{W}_n) = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_n \\ \varphi_n \end{pmatrix} \quad (2.150)$$

Para que los operadores M y L sean autoadjuntos se debe verificar que

$$\int_0^L [\bar{W}_n^T L(\bar{W}_m) - \bar{W}_m^T L(\bar{W}_n)] dx = 0 \quad (2.151)$$

$$\int_0^L [\bar{W}_n^T M(\bar{W}_m) - \bar{W}_m^T M(\bar{W}_n)] dx = 0 \quad (2.152)$$

La segunda condición, ecuación (2.152) se satisface de manera automática, usando la ecuación (2.148) se puede escribir (2.151) como

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) \int_0^L \bar{W}_n^T M(\bar{W}_m) dx = 0 \quad (2.153)$$

Como los autovalores ω_i^2 son únicos para cada autofunción \bar{W}_i entonces $\omega_m^2 \neq \omega_n^2$ si $m \neq n$, por lo tanto para que la ecuación anterior sea cero la integral debe ser nula. Esta es la condición de ortogonalidad para las autofunciones que se estaba buscando.

$$\int_0^L \bar{W}_n^T M(\bar{W}_m) dx = 0 \quad m \neq n \quad (2.154)$$

Es posible normalizar las autofunciones imponiendo que la condición de ortogonalidad anterior se igual a uno cuando $m = n$.

$$\int_0^L \bar{W}_n^T M(\bar{W}_m) dx = 1 \quad m = n \quad (2.155)$$

Condición que permite determinar los coeficientes indeterminados C_1 y \tilde{C}_1 de las soluciones espaciales. Combinando las ecuaciones (2.154) y (2.155) es posible escribir la expresión

$$\int_0^L \bar{W}_n^T M(\bar{W}_m) dx = \delta_{mn} \quad (2.156)$$

donde δ_{mn} es la delta de Kronecker.

Una vez conocida la condición de ortogonalidad para los operadores M y L se está en condiciones de proseguir con el cálculo de la solución temporal de las ecuaciones del movimiento. Primero es necesario considerar la forma de la solución general como el sumatorio de una función temporal por las autofunciones espaciales.

$$\bar{v}(x, t) = \begin{pmatrix} w(x, t) \\ \phi(x, t) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \bar{W}_n(x) \quad (2.157)$$

Introduciendo la solución general v en las ecuaciones del movimiento (2.86) y (2.87) se llega a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} T_n(t) M(\bar{W}_n(x)) + T_n(t) L(\bar{W}_n(x)) \right] = \begin{bmatrix} f(x, t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.158)$$

Usando la ecuación (2.148) junto con la ecuación anterior tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} T_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) \right] M(\bar{W}_n(x)) = \begin{bmatrix} f(x, t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.159)$$

Multiplicando por \bar{W}_m^T e integrando espacialmente a lo largo de la viga se puede hacer uso de la condición de ortogonalidad (2.156) para llegar a

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} T_m(t) + \omega_m^2 T_m(t) = F_m(t) \quad (2.160)$$

donde

$$F_m(t) = \int_0^L W_m f(x, t) dx \quad (2.161)$$

y W_m es la autofunción para el desplazamiento vertical asociada a la frecuencia ω_m .

Anulando la fuerza en la ecuación (2.160) se obtiene la ecuación homogénea para la variable temporal

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} T_m(t) + \omega_m^2 T_m(t) = 0 \quad (2.162)$$

cuya solución es del tipo $T(t) = d_1 \sin(\omega t) + d_2 \cos(\omega t)$. Para hallar los coeficientes d_1 y d_2 se debe hacer uso de las condiciones iniciales $v(x, 0)$ y $\frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = \dot{v}(x, 0)$. Para calcular $T_i(0)$ y $\dot{T}_i(0)$ a partir de $v(x, 0)$ y $\dot{v}(x, 0)$ es necesario aplicar

$$\begin{aligned} T_m(0) &= \int_0^L \bar{W}_m^T M(v(x, 0)) dx \\ \dot{T}_m(0) &= \int_0^L \bar{W}_m^T M(\dot{v}(x, 0)) dx \end{aligned} \quad (2.163)$$

Con lo que la solución homogénea temporal resulta ser

$$T_n(t) = \frac{\dot{T}_n(0)}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + T_n(0) \cos(\omega_n t) \quad (2.164)$$

Para completar la solución temporal se necesita una solución particular de la ecuación 2.160, que dependerá de la forma de la fuerza aplicada a la viga. Se puede calcular una solución particular haciendo uso del método de variación de parámetros utilizando como funciones base las de la solución homogénea, $y_1 = \sin(\omega_n t)$ e $y_2 = \cos(\omega_n t)$ o aplicando el método de coeficientes indeterminados.

La solución temporal es por tanto de la forma

$$T_n(t) = \frac{\dot{T}_n(0)}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + T_n(0) \cos(\omega_n t) + T_{particular} \quad (2.165)$$

2.3.2.6. Solución general

La solución general es el sumatorio del producto de las soluciones espaciales por las soluciones temporales calculadas, como se ha expresado en (2.157).

Para obtener la solución espacial del movimiento libre se deben resolver las ecuaciones de frecuencias de las tablas 2.1 y 2.2 obteniendo las expresiones de los números de onda a y b (o \tilde{b}), que permitan conocer ω_n , α , β , $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ y calcular la parte espacial de las soluciones expresadas en la Tabla 2.3.

El siguiente paso es conocer la parte temporal de las soluciones expresada en (2.165) haciendo uso de las condiciones iniciales y de la solución particular que corresponda a la carga exterior aplicada. Para calcular los coeficientes indeterminados C_1 y \tilde{C}_1 se debe aplicar la condición de normalización expresada en (2.156).

$$\begin{pmatrix} w(x, t) \\ \phi(x, t) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \dot{T}_n(0) \\ \omega_n \end{pmatrix} \sin(w_n t) + T_n(0) \cos(w_n t) + T_{particular} \begin{pmatrix} W_n \\ \varphi_n \end{pmatrix} \quad (2.166)$$

2.3.2.7. Carga puntual y carga distribuida.

Se han resuelto las ecuaciones de Timoshenko (2.86) y (2.87), para vigas biapoyadas y en voladizo, con objeto de conocer los desplazamientos $w(x, t)$ y $\phi(x, t)$ que experimentan vigas de tipo laminado sometidas a cargas dinámicas. Dichas ecuaciones habían sido deducidas aplicando un equilibrio de fuerzas y momentos a una sección de la viga sometida a una carga exterior $f(x, t)$ distribuida a lo largo de la misma y de tipo uniforme.

Si se quiere calcular los desplazamientos que sufriría una viga sometida a una carga puntual $P(t)$ en lugar de una carga distribuida $f(x, t)$ será necesario calcular una expresión que proporcione una carga distribuida equivalente a la carga puntual y que pueda ser introducida en las ecuaciones de la solución espacial (2.160) y (2.161).

Para calcular la carga distribuida equivalente se puede hacer uso de un desarrollo en serie de Fourier [12] para obtener la siguiente expresión:

$$q(x, t) = \frac{2P(t)}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi r}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (2.167)$$

donde $P(t)$ es la carga puntual aplicada, L es la distancia entre apoyos y r es la coordenada x donde se aplica la carga puntual.

2.4. Parámetros del laminado

Utilizando las teorías del laminado y de cortadura de primer orden es posible obtener parámetros globales del laminado que permitan aplicar al mismo las ecuaciones de la teoría de elasticidad y resistencia de materiales para vigas isótropas y homogéneas. Los valores de el módulo de elasticidad en la dirección x , E_x y el módulo aparente de rigidez a cortadura G_{xz} del laminado resultan ser:

$$\begin{aligned} E &= 12 \frac{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}{H^3 D_{11}} = \frac{12}{H^3 d_{11}} \\ G &= \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{H C_{11}} = \frac{1}{H c_{11}} \end{aligned} \quad (2.168)$$

Donde D_i y C_i son los coeficientes de las matrices D y C expresados en las fórmulas (2.12) y (2.58). H es el espesor total del laminado y d_{11} y c_{22} son los elementos 11 y 22 de las matrices d y c , inversas de las matrices D y C respectivamente.

2.5. Criterios de rotura

El desarrollo experimentado por los códigos de simulación numérica durante los últimos años, ha provocado la aparición de modelos de comportamiento mecánico para materiales compuestos de tipo laminado que tienen en cuenta los distintos modos de daño que pueden aparecer. Debido a la fragilidad del refuerzo, estos modelos no suelen contemplar deformación plástica en el material y se limitan a proponer criterios de fallo que acotan el dominio elástico y cuya verificación implica la pérdida de rigidez en una o más direcciones de forma brusca o progresiva.

Dentro de los diferentes criterios de fallo aplicables a materiales compuestos de tipo laminado se pueden distinguir entre los que consideran el fallo dentro del plano de cada lámina (bidimensionales) y los que consideran el fallo del laminado teniendo en cuenta el estado de tensiones tridimensional.

2.5.1. Criterios de fallo en la lámina.

Estos criterios consideran exclusivamente las tensiones en el plano de la lámina y, por tanto, la pérdida de rigidez afecta únicamente a las propiedades en ese mismo plano. Se pueden agrupar en tres familias: en primer lugar, los criterios en los que se compara únicamente la componente de valor máximo, ya sea de la tensión o de la deformación; en segundo lugar, los criterios cuadráticos en los que se consideran distintas componentes actuando al mismo tiempo como los criterios de Tsai-Hill y Tsai-Wu y, finalmente, criterios en los que se consideran diferentes modos de fallos en los que actúan diferentes componentes de la tensión, como son el criterio de Chang-Chang y el de Hashin.

2.5.1.1. Criterios de valor máximo.

Tensión máxima.

Este criterio asume que cuando se alcanza un valor máximo en una de las componentes del tensor de tensiones el material se rompe. En los materiales de tipo laminado se suelen definir dos valores máximos de tensión en dirección de las fibras (uno para tracción y otro para compresión), otros dos valores en dirección perpendicular y un valor máximo para la tensión de cortadura en el plano de la lámina.

Deformación máxima.

Este criterio es muy similar al anterior, la única diferencia es que los valores máximos que definen la rotura del material son valores de deformación máxima en lugar de tensión. Se definen cinco valores límites que son equivalentes a los del criterio de tensión máxima.

2.5.1.2. Criterios cuadráticos.

Criterio de rotura de Tsai-Hill.

El criterio para láminas bidimensionales de Tsai-Hill es uno de los criterios tensionales más empleados y está implementado en la mayoría de los códigos comerciales de elementos finitos, que simulan el comportamiento mecánico de materiales compuestos de tipo laminado.

El criterio de rotura de Tsai-Hill para materiales anisótropos esta basado en el criterio de plastificación de Von Misses. Considera los efectos superpuestos de todas las tensiones que intervienen en la viga consideradas por la teoría de cortadura de primer orden. Para poder aplicar el criterio se necesitan conocer los parámetros de resistencia del material a tracción o compresión X, Y, Z en las direcciones 1, 2, 3 y los parámetros de resistencia a cortadura S_{23}, S_{13}, S_{12}

La expresión del criterio es:

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{Y}\right)^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}\left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right) + \left(\frac{\tau_{23}}{S_{23}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{S_{13}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 = 1 \quad (2.169)$$

que indica que la plastificación o rotura tiene lugar cuando la suma de los términos cuadráticos a la izquierda de la expresión es mayor o igual que uno.

El criterio de rotura de Tsai-Hill es el seleccionado para el modelo simplificado que se desarrollará en el capítulo siguiente. Se considerará que el fallo del laminado tiene lugar cuando se alcanza la rotura de la primera lámina.

Criterio de Tsai-Wu.

El criterio de rotura de Tsai-Wu considera diferentes combinaciones de las componentes del tensor de tensiones en el plano. Su expresión es similar a la del criterio de Tsai-Hill.

$$F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{66}\sigma_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} = 1 \quad (2.170)$$

Además de las tensiones en el plano, aparecen una serie de coeficientes ($F_1, F_2, F_{11}, F_{22}, F_{66}$) que son funciones de las tensiones de rotura y el coeficiente F_{12} que es un valor de resistencia que se obtiene mediante un ensayo de tracción biaxial. Se considera que la lámina ha fallado cuando el sumatorio alcanza el valor unidad.

2.5.1.3. Criterios que consideran distintos tipos de fallo.

Criterio de Chang-Chang.

Este criterio permite distinguir tres modos de fallo diferentes, cada uno de ellos se cumple cuando su ecuación asociada alcanza el valor unidad.

El primer modo de fallo contempla la rotura de fibras.

$$e_f^2 = \left(\frac{\sigma_{11}}{X_t} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}} \right)^2 \geq 1 \quad (2.171)$$

donde X_t es la resistencia a tracción en la dirección de las fibras, y S_{12} la resistencia a cortadura en el plano de la lámina.

El segundo modo contempla la rotura de la matriz a tracción.

$$e_{mt}^2 = \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_t} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}} \right)^2 \geq 1 \quad \sigma_{22} > 0 \quad (2.172)$$

siendo Y_t la resistencia del laminado a tracción en dirección perpendicular a la de las fibras.

El tercer modo contempla la rotura de la matriz a compresión.

$$e_{mc}^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{-\sigma_{22}}{S_{12}} \right)^2 + \frac{Y_c^2 \sigma_{22}^2}{4S_{12}^2 Y_c} - \frac{\sigma_{22}}{Y_c} + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}} \right)^2 \geq 1 \quad \sigma_{22} < 0 \quad (2.173)$$

donde Y_c es la resistencia a compresión en dirección perpendicular a la de las fibras.

Criterio de Hashin.

Este criterio permite distinguir cuatro modos de rotura diferentes. A diferencia del criterio de Chang-Chang distingue la rotura en dirección de las fibras a tracción y a compresión.

El primer modo de fallo contempla la rotura de las fibras a tracción.

$$e_{ft}^2 = \left(\frac{\sigma_{11}}{X_t} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}} \right)^2 \geq 1 \quad \sigma_{11} \geq 0 \quad (2.174)$$

El segundo modo de fallo contempla la rotura en dirección de las fibras sometidas a compresión.

$$e_{fc}^2 = \left(\frac{\sigma_{11}}{X_c} \right)^2 \geq 1 \quad \sigma_{11} < 0 \quad (2.175)$$

El tercer modo contempla la rotura de la matriz a tracción.

$$e_{mt}^2 = \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_t} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}} \right)^2 \geq 1 \quad \sigma_{22} \geq 0 \quad (2.176)$$

El cuarto modo contempla la rotura de la matriz a compresión.

$$e_{mc}^2 = \frac{\sigma_{22}}{Y_c} + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}} \right)^2 \geq 1 \quad \sigma_{22} < 0 \quad (2.177)$$

2.5.2. Criterios de fallo del laminado.

Cuando el laminado tiene que soportar tensiones interlaminares los criterios presentados anteriormente presentan limitaciones y es posible emplear criterios que consideren el estado tensional tridimensional que experimenta el laminado.

Un ejemplo es el criterio de rotura propuesto por Hou [10]. El criterio consta de cuatro modos de fallo y está basado en la formulación del criterio bidimensional de Chang-Chang [5]. El cuarto modo de fallo se basa en el criterio de delaminación desarrollado por Brewer y Lagace [4].

$$d_{del}^2 = \left(\frac{\sigma_{33}}{Z_r} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{23}}{S_{23}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{13}}{S_{13}} \right)^2 + \geq 1 \quad (2.178)$$

donde Z_r es la resistencia a tracción en dirección perpendicular al plano de la lámina, S_{23} es la resistencia a cortante en el plano perpendicular a la dirección de las fibras y S_{31} la resistencia a cortante en el plano perpendicular a la dirección 2.

El primer modo de fallo contempla la rotura de fibras.

$$d_f^2 = \left(\frac{\sigma_{11}}{X_t} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12} + \sigma_{13}}{S_f} \right)^2 \geq 1 \quad (2.179)$$

Respecto al primer modo de fallo del criterio de Chang-Chang se ha añadido la componente de cortadura σ_{13} y la resistencia a cortadura en el plano de la lámina S_{12} , ha sido sustituida por S_f , resistencia a cortadura de la fibra.

En el modo de rotura de la matriz a tracción se introduce un nuevo término σ_{23} , que representa la contribución del cortante en el plano perpendicular a las fibras, y la nueva constante S_{23} es la resistencia a cortadura en ese mismo plano.

$$d_{mt}^2 = \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_t} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{23}}{S_{23}} \right)^2 \geq 1 \quad \sigma_{22} \geq 0 \quad (2.180)$$

El modo de rotura de la matriz a compresión se mantiene igual que en el criterio de Chang-Chang.

Capítulo 3

Resultados

3.1. Descripción del modelo simplificado para vigas de tipo laminado sometidas a flexión.

Hasta aquí se han descrito las teorías clásica y de cortadura del laminado que permiten relacionar los esfuerzos y las deformaciones presentes en las vigas, además de calcular parámetros globales del laminado presentes en las ecuaciones del movimiento. Se han deducido las ecuaciones del movimiento de una viga Timoshenko y se ha hallado su solución para las configuraciones de viga biapoyada y en voladizo, obteniendo así los desplazamientos de las mismas. Además se ha descrito el criterio de rotura a utilizar para determinar si las vigas rompen ante los efectos de las cargas dinámicas exteriores.

En este capítulo se describirán los pasos necesarios a implementar en un software de calculo matemático para simular el comportamiento de las vigas haciendo uso de la teoría desarrollada en los capítulos anteriores. Primero se describirán los pasos a seguir para implementar el modelo buscado que permita analizar el estado tensional de vigas sometidas a cargas dinámicas que generen esfuerzos de flexión. Hará uso de la teoría de cortadura para calcular los parámetros generalizados del laminado, tensiones y deformaciones, además de las ecuaciones de Timoshenko para hallar los desplazamientos.

Posteriormente se hará la misma descripción para un modelo estático que nos permita realizar comparaciones con el modelo dinámico buscado. El modelo estático

hará uso de la teoría clásica del laminado para calcular los parámetros del laminado y deformaciones. Los esfuerzos y desplazamientos serán proporcionados por las ecuaciones de una viga tipo Euler-Bernoulli.

Las descripciones de los modelos y la teoría desarrollada en el capítulo anterior son de tipo general y permiten conocer el estado tensional de vigas de tipo laminado sometidas a flexión por el efecto de cargas dinámicas o estáticas externas. Los modelos son válidos para cualquier configuración de viga siempre que se conozca las soluciones y las condiciones de contorno de las correspondientes ecuaciones del movimiento.

Dado que se disponía de datos experimentales de ensayos de impacto a flexión en tres puntos de probetas laminadas, se ha decidido programar los modelos simplificados dinámico y estático para el caso particular de una viga biapoyada sometida a una carga puntual en su centro. Se busca así comparar los resultados proporcionados por el modelo dinámico objeto de este trabajo con los datos resultantes de los ensayos de impacto. Como lenguaje de programación se ha decidido utilizar *MATLAB* por su combinación de sencillez de uso y potencia.

3.1.1. Modelo dinámico. Teoría de cortadura y viga Timoshenko.

A continuación se describen los pasos que sigue el modelo dinámico para conocer el estado tensional de vigas de tipo laminado sometidas a flexión por el efecto de cargas externas variables en el tiempo. El modelo debe iterar en el tiempo comprobando si la viga rompe debido a los esfuerzos dinámicos en cada paso y si no volver a repetir los cálculos incrementando el valor del tiempo.

Los pasos a seguir son:

1. Comenzar en el instante inicial con $t_i = 0$.
2. Calcular la fuerza $f(x, t)$ para el instante de tiempo que corresponda a cada iteración. En caso de que la fuerza externa sea de tipo puntual es necesario calcular la fuerza distribuida equivalente haciendo uso de la ecuación 2.167.

3. El siguiente paso consiste en calcular los desplazamientos $\begin{pmatrix} w(x, t) \\ \phi(x, t) \end{pmatrix}$ dados por las ecuaciones de Timoshenko (2.86) y (2.87), como se ha descrito en el capítulo 2.3.2.
4. Calcular los parámetros del laminado E y G con la teoría de cortadura de primer orden aplicando las ecuaciones 2.168.
5. A continuación se deben calcular las derivadas de los desplazamientos de forma numérica $\begin{pmatrix} w(x, t)' \\ \phi(x, t)' \end{pmatrix}$ para calcular los esfuerzos por unidad de anchura de la viga. En el código de *MATLAB* se ha optado por hacer uso del método de diferencias divididas para el calculo de las derivadas.

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{B} EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ Q &= \frac{1}{B} K A G (\phi - \frac{\partial w}{\partial x}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

6. Conocidos el momento flector M según el eje x y el cortante Q en la dirección z es posible calcular las deformaciones γ y ε usando las expresiones (2.11) y (2.63), para llegar a

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{K} [C]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ Q \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} &= [D]^{-1} \begin{Bmatrix} M \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

recordando que $\varepsilon = z \cdot \{\kappa\}$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

7. Posteriormente se deben calcular las tensiones en ejes globales de la viga a partir de las deformaciones calculadas en el apartado anterior usando las rela-

ciones constitutivas para las láminas de las teorías clásicas y de cortadura.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

8. Aplicando un cambio de base se obtienen las tensiones en ejes locales de la lámina.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

9. A continuación se debe aplicar el criterio de Tsai-Hill a las tensiones locales para comprobar si se alcanza la rotura en alguna de las láminas.

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{Y}\right)^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right) + \left(\frac{\tau_{23}}{S_{23}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{S_{13}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 = 1 \quad (3.6)$$

10. Si no se ha alcanzado la rotura del laminado se debe volver al punto 1 incrementando el valor de tiempo e iniciando una nueva iteración.

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t \quad (3.7)$$

Estos pasos quedan resumidos en la figura 3.1

3.1.2. Modelo estático. Teoría clásica del laminado y viga Euler.

Los pasos que debe ejecutar el modelo estático simplificado son:

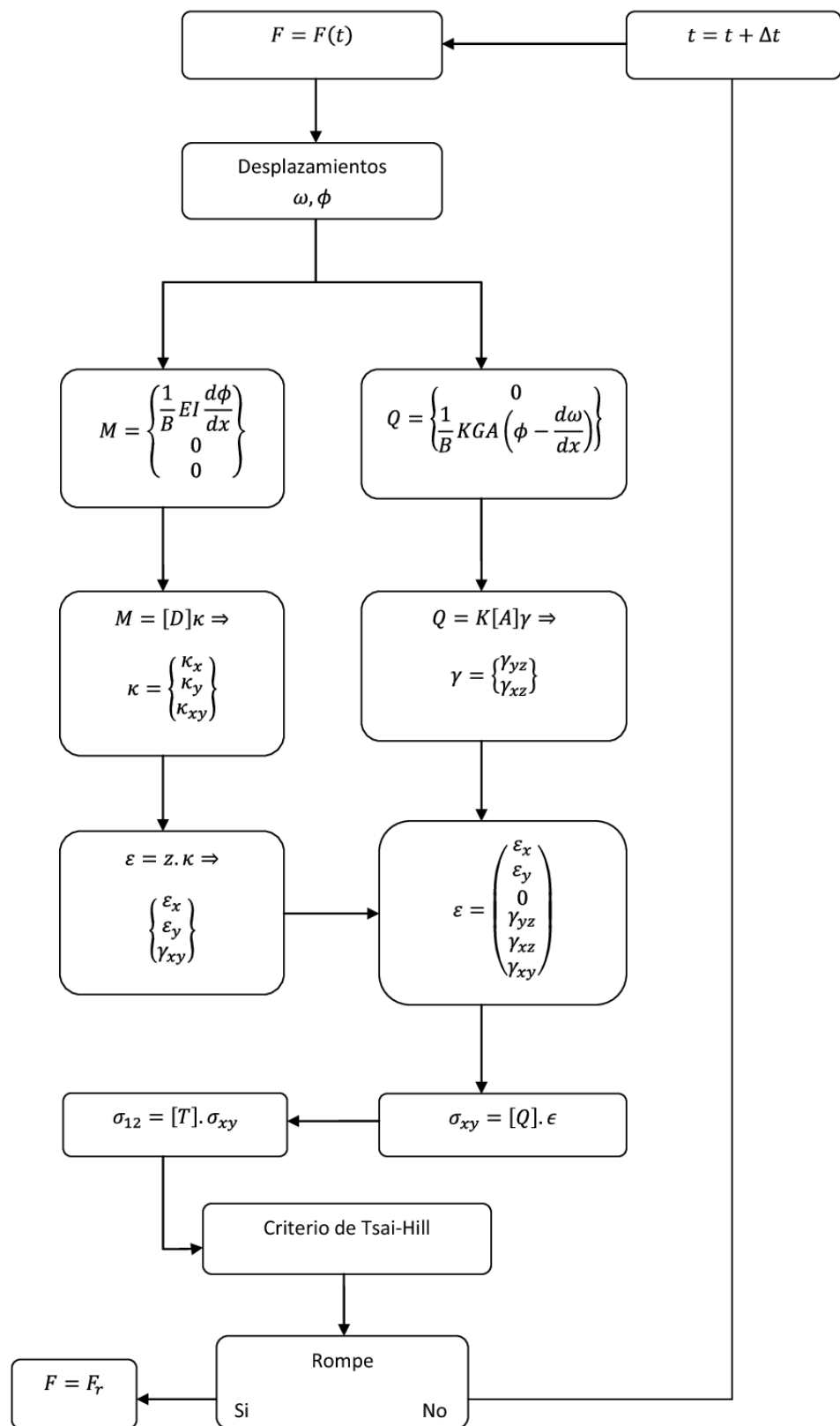


Figura 3.1: Resumen del modelo matemático para cargas dinámicas

1. Calcular los desplazamientos $\begin{pmatrix} w(x, t) \\ \phi(x, t) \end{pmatrix}$ dados por las ecuaciones de Euler para la viga estudiada, utilizando las ecuaciones particulares correspondientes a los apoyos en los extremos y la fuerza externa $f(x)$.
2. Calcular los esfuerzos por unidad de anchura de la viga que proporcionan las ecuaciones de Euler - Bernoulli para el tipo de viga o carga que corresponda al caso estudiado.

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{B} M_{euler} \\ Q &= \frac{1}{B} Q_{euler} \end{aligned} \quad (3.8)$$

3. Conocidos el momento flector M según el eje x se deben calcular las deformaciones ε usando la expresión (2.11), para llegar a

$$\begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} = [D]^{-1} \begin{pmatrix} M \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

y recordando que $\varepsilon = z \cdot \{\kappa\}$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

4. Posteriormente se deben calcular las tensiones en ejes globales de la viga a partir de las deformaciones calculadas usando las relaciones constitutivas para las láminas de la teoría clásica del laminado.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

5. Aplicando un cambio de base se obtienen las tensiones en ejes locales de la

lámina.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

6. Aplicar el criterio de Tsai-Hill a las tensiones locales para comprobar si se alcanza la rotura en alguna de las láminas.

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{Y}\right)^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}\left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right) + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 = 1 \quad (3.13)$$

3.2. Validación del modelo

3.2.1. Datos experimentales

Se disponen de datos de un ensayo de flexión dinámica en torre de caída [17], para probetas laminadas de material compuesto, realizado en los talleres de la universidad. Se intentará reproducir las condiciones de los ensayos a través del modelo simplificado para cargas dinámicas generado y así comparar los resultados obtenidos por ambas vías.

Este tipo de ensayos sobre materiales de tipo laminado son muy habituales porque el comportamiento de las probetas durante el ensayo es representativo del comportamiento de elementos estructurales tipo viga sometidos a cargas impulsivas.

Los ensayos consistieron en dejar caer un percutor de masa m igual a 3.6 kg con una energía de impacto E_{imp} de 30 J sobre las probetas ensayadas. El percutor impacta en el punto medio de las probetas que se encuentran biapoyadas.

La geometría del ensayo se refleja en la Figura 3.2 donde la distancia entre apoyos L es de 80 mm , el espesor B es de 20 mm y la altura H depende del número de láminas que configuren la probeta y de su espesor. La longitud total de las probetas debe ser mayor que la distancia entre apoyos, en este caso es de 105 mm .

El material empleado en los ensayos fue AS4/3501-6, constituido por refuerzos de fibra de carbono en matriz epóxica. Este material es muy utilizado en la industria aeroespacial por sus elevados valores de rigidez y resistencia específicas.

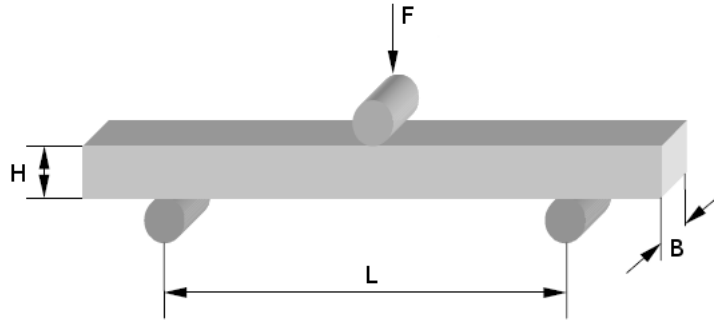


Figura 3.2: Geometría de las probetas en los ensayos

Los datos específicos del material quedan recogidos en la Tabla 3.1.

Los ensayos fueron realizados sobre dos secuencias de apilamiento distintas. La primera consistía en un laminado unidireccional formado por 10 láminas $[0]_{10}$ de $0,2mm$ de espesor. La segunda probeta estaba formada por 12 láminas con el mismo espesor y con una secuencia de apilamiento $[0, 90]_{3S}$

Como resultados de los ensayos se obtuvieron registros fuerza - tiempo del percutor sobre las probetas ensayadas. La Figura 3.3 muestra los resultados obtenidos para los laminados $[0]_{10}$ (izquierda) y $[0, 90]_{3S}$ (derecha). Estas señales presentan una serie de oscilaciones que pueden ser debidas a las vibraciones de la probeta y del percutor durante el impacto.

Es posible calcular el desplazamiento de la probeta de manera indirecta mediante aplicación de integraciones sucesivas de la mencionada curva fuerza-tiempo. Para ello es necesario asumir como hipótesis el contacto permanente entre la probeta y el percutor.

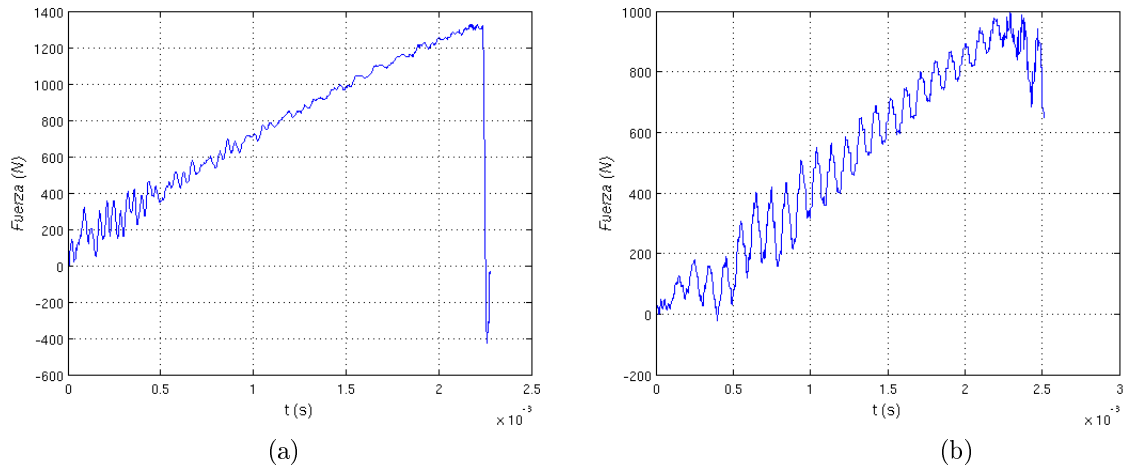
En primer lugar planteando un equilibrio de fuerzas sobre el percutor es sencillo obtener la expresión para la aceleración que experimenta éste, en función de la fuerza de contacto $F(t)$, la masa m del percutor y su peso P_{per} .

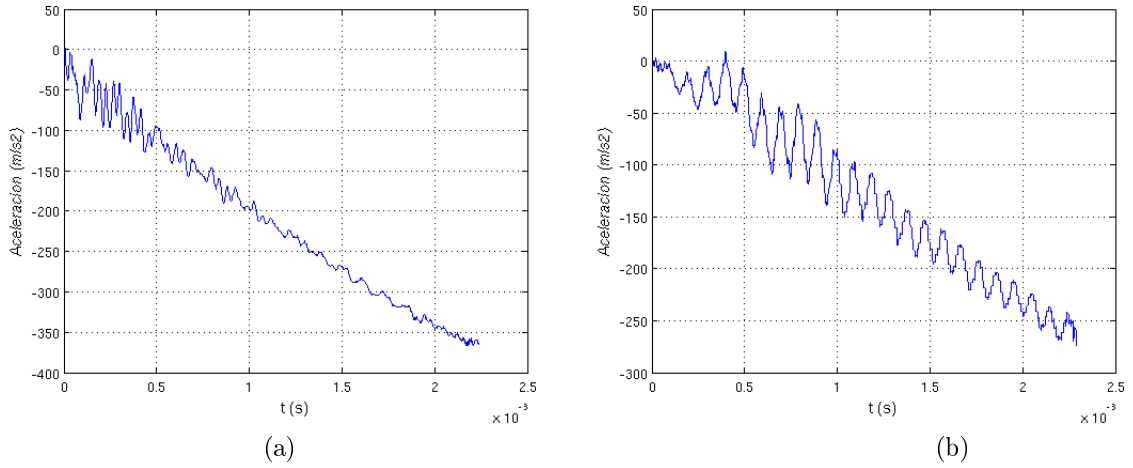
$$a(t) = \frac{P_{per} - F(t)}{m} \quad (3.14)$$

La Figura 3.4 recoge los resultados de esta integración para los laminados $[0]_{10}$ y $[0, 90]_{3S}$.

Tabla 3.1: Propiedades mecánicas del material

Módulo de elasticidad longitudinal, E_1	126	(Gpa)
Módulo de elasticidad transversal, E_2	11	(Gpa)
Módulo de cortante en en plano, G_{12}	6.6	(Gpa)
Módulo de cortante fuera del plano, G_{23}	3.93	(Gpa)
Resistencia a tracción longitudinal, X_T	1950	(Mpa)
Resistencia a compresión longitudinal, X_C	1480	(Mpa)
Resistencia a tracción transversal, Y_T	48	(Mpa)
Resistencia a compresión transversal, Y_C	200	(Mpa)
Resistencia a cortante en el plano, S_{12}	79	(Mpa)
Resistencia a cortante fuera del plano, S_{23}	50	(Mpa)
Densidad, ρ	1578	($\frac{Kg}{m^3}$)
Coefficiente de Poisson principal, ν_{21}	0.28	
Coefficiente de Poisson secundario, ν_{32}	0.4	


Figura 3.3: Registro Fuerza - tiempo, (a) $[0]_{10}$, (b) $[0, 90]_{3S}$


 Figura 3.4: Curva de aceleración, (a) $[0]_{10}$, (b) $[0, 90]_{3S}$

Una vez obtenida la expresión de la aceleración es posible utilizar la fórmula de Simpson compuesta para integrar numéricamente los valores de aceleración (3.14) y obtener la velocidad durante el impacto $v(t)$ mediante la ecuación (3.15), donde v_0 es la velocidad en el instante en que el percutor impacta sobre la probeta. Esta velocidad se calcula mediante un balance de energías, conocidas la energía de impacto del ensayo E_{imp} , y la masa del percutor m .

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)dt \quad (3.15)$$

La Figura 3.5 muestra las velocidades calculadas mediante integración para los laminados $[0]_{10}$ y $[0, 90]_{3S}$.

Mediante una nueva integración numérica de la ecuación anterior se determina el desplazamiento del extremo del percutor durante el impacto $w(t)$, considerando que el desplazamiento inicial de la probeta en el instante de contacto es cero.

$$w(t) = \int_0^t \left(v_0 + \int_0^t a(t)dt \right) dt \quad (3.16)$$

De acuerdo a la anterior hipótesis de contacto permanente es válido asimilar el

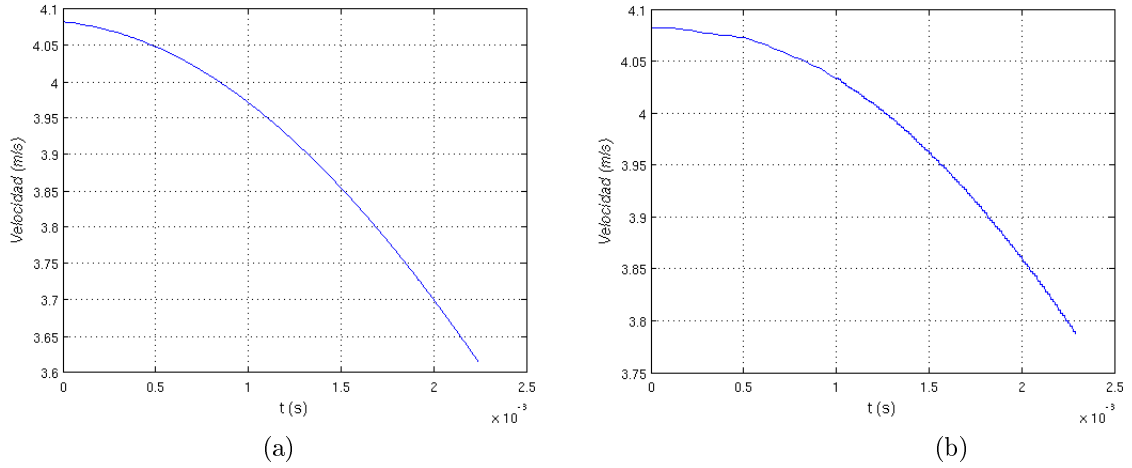


Figura 3.5: Curva de velocidad, (a) $[0]_{10}$, (b) $[0, 90]_{3S}$

desplazamiento vertical obtenido para el percutor a el de la sección central de las probetas ensayadas.

La Figura 3.6 recoge el desplazamiento en el punto medio de los laminados $[0]_{10}$ y $[0, 90]_{3S}$.

3.2.2. Comparación de resultados

La Tabla 3.2 resume los datos experimentales que se disponen para las probetas de ambos tipos de laminado. La fuerza y el tiempo de rotura son medidas directas proporcionadas por los registros de la máquina de ensayo. El desplazamiento vertical en el punto medio, para el momento de rotura, se ha obtenido de manera indirecta por integración siguiendo los pasos descritos en el apartado anterior.

Para validar el modelo simplificado para cargas dinámicas, descrito en la sección 3.1.1, es necesario simular los mismos ensayos y comparar los datos obtenidos con los experimentales. El primer paso es fijar la geometría como viga biapoyada e introducir las dimensiones en el modelo.

A continuación se debe simular la fuerza recogida en los registros fuerza tiempo. Para ello se introduce en el modelo una fuerza variable con el tiempo, de tipo triangular

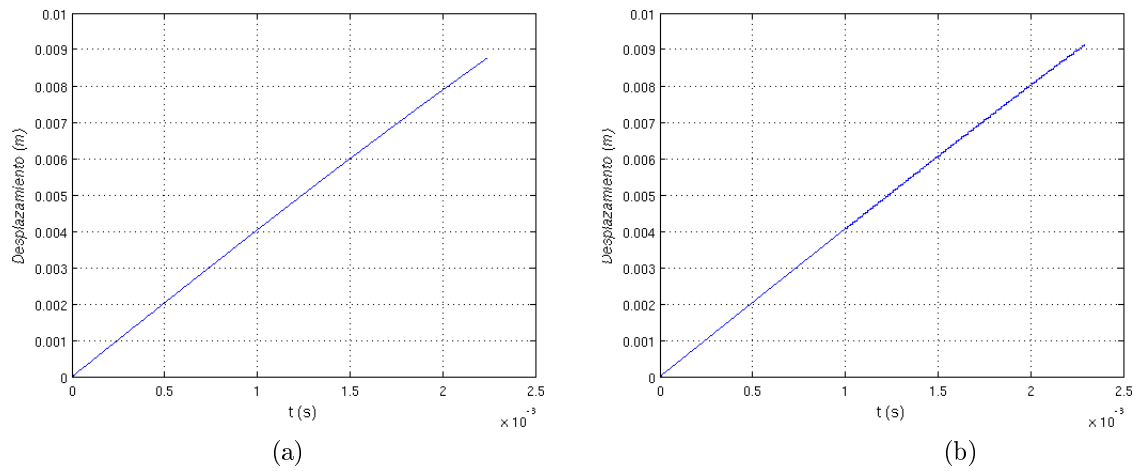


Figura 3.6: Curva de desplazamiento, (a) $[0]_{10}$, (b) $[0, 90]_{3S}$

Tabla 3.2: Resumen de los datos experimentales en el instante de rotura

Laminado $[0]_{10}$	Fuerza	1318.6	(N)
	Tiempo	2.238	(ms)
	Desplazamiento	8.755	(mm)
Laminado $[0, 90]_{3S}$	Fuerza	995	(N)
	Tiempo	2.292	(ms)
	Desplazamiento	9.13	(mm)

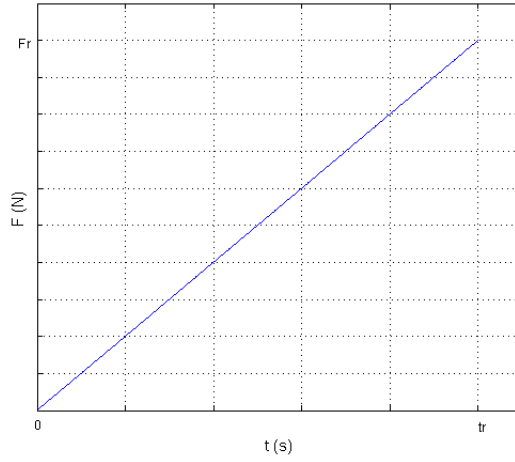


Figura 3.7: Fuerza triangular $f(x, t) = \frac{F_r}{t_r}t$

Tabla 3.3: Resumen de los datos del modelo en el instante de rotura

Laminado $[0]_{10}$	Fuerza	1330	(N)
	Tiempo	2.26	(ms)
	Desplazamiento	10	(mm)
Laminado $[0, 90]_{3S}$	Fuerza	1072	(N)
	Tiempo	2.47	(ms)
	Desplazamiento	7	(mm)

$f(x, t) = \frac{F_r}{t_r}t$ (figura 3.7), donde los valores de fuerza y tiempos de rotura F_r y t_r de cada laminado son los recogidos en la Tabla 3.2. Al ser la carga simulada una carga puntual en la sección central de la viga se ha de calcular la carga distribuida equivalente, de acuerdo a 2.167, para introducirla en la solución correspondiente de las ecuaciones de Timoshenko.

Para completar la información necesaria en el modelo se deben introducir los datos del material recogidos en la Tabla 3.1. Entonces se ejecuta el código de *MATLAB* hasta que el programa indique que el laminado ha alcanzado el estado de rotura. Se debe repetir esta operación para cada una de las secuencias de apilamiento ensayadas. El programa proporciona los valores de tiempos de rotura, fuerzas y desplazamientos alcanzados en la sección central de la viga para dichos tiempos. Los resultados obtenidos quedan recogidos en la Tabla 3.3

Tabla 3.4: Diferencias entre datos experimentales y los calculados por el modelo simplificado

Laminado $[0]_{10}$	Fuerza de rotura	1 %
	Tiempo de rotura	1 %
	Desplazamiento	14 %
Laminado $[0, 90]_{3S}$	Fuerza de rotura	7 %
	Tiempo de rotura	7 %
	Desplazamiento	23 %

Comparando los resultados experimentales con los calculados por el modelo simplificado para cargas dinámicas se observa que los valores medidos directamente son bastante similares. La fuerza y el tiempo de rotura experimentales y los calculados matemáticamente por el modelo difieren en un uno por ciento para el laminado unidireccional y en un siete por ciento para el laminado cruzado.

Los valores de desplazamiento experimentales, calculados indirectamente y los calculados por el modelo presentan mayores diferencias, un catorce por ciento para el laminado unidireccional y un veintitrés por ciento para el laminado cruzado. Los valores de las diferencias entre los datos se recogen en la Tabla 3.4.

A la vista de estos resultados se puede considerar que el modelo simplificado es válido, proporcionando unos resultados muy ajustados para predecir el tiempo de rotura de la viga ante una carga puntual dinámica y el valor que alcanzará esa carga en dicho instante de tiempo. Los resultados de los desplazamientos alcanzados en la sección central de la viga no son tan precisos pero si suficientemente buenos para proporcionar una primera aproximación, teniendo en cuenta además que no se están comparando con medidas experimentales directas.

3.3. Influencia de la geometría

En este apartado se quiere comprobar como influye la esbeltez de la viga ($\frac{L}{H}$) en las diferencias entre el modelo dinámico simplificado que se acaba de validar y el modelo estático. Para evitar la influencia del tiempo se usará el modelo dinámico aplicando una carga triangular como la anterior $f(x, t) = \frac{F_r}{t_r}t$, considerando un

Tabla 3.5: Secuencias de apilamiento y grado de anisotropía

Laminado	Apilamiento	$\frac{E_x}{G_{xz}}$
Unidireccional	$[0]_8$	19.09
Ortótropo	$[0, 90]_{2S}$	17.18
Cuasi-isótropo	$[0, 90, 45, -45]_S$	15.3

tiempo de aplicación lento $t_r = 1s$, ya que presumiblemente cuando los tiempos de aplicación sean muy lentos el modelo dinámico (Teoría de cortadura, ecuaciones del movimiento de Timoshenko) debe converger al modelo estático (Teoría clásica, ecuaciones del movimiento de Euler-Bernoulli). En este caso se aplicará una carga puntual que alcance un valor máximo de $F_r = 100N$ en la sección central de una viga biapoyada. Dado que se ha prescindido de la influencia del tiempo en el modelo al asumirlo como cuasi-estático, lo que se está comparando es la influencia de las tensiones de cortadura consideradas en el modelo dinámico a través de la teoría de cortadura.

Se calcularán las diferencias entre la flecha en la sección central de la viga que proporcionan ambos modelos para distintos valores de $(\frac{L}{H})$ manteniendo constante el espesor y variando la longitud de la viga. Se utilizarán láminas del mismo material que en de los ensayos experimentales y con el mismo grosor. Además se repetirán los cálculos para tres secuencias de apilamiento distintas. Un laminado unidireccional $[0]_8$, un laminado ortótropo $[0, 90]_{2S}$ y un laminado cuasi-isótropo $[0, 90, 45, -45]_S$.

Los tres laminados tienen el mismo numero de láminas para que coincidan en espesor y puedan ser compararlos. El cociente entre el modulo aparente a flexión E_x y el modulo aparente de cortadura G_{xz} proporciona información sobre el grado de anisotropía del laminado, a mayor valor del cociente mayor es el grado de anisotropía. Los resultados para las secuencias de apilamiento consideradas están recogidos en la Tabla 3.5

Después de calcular las diferencias entre las flechas del modelo dinámico y estático, se adimensionalizan con la flecha estática,

$$Diferencia = \frac{w\left(\frac{L}{2}\right) - w\left(\frac{L}{2}\right)_{estatica}}{w\left(\frac{L}{2}\right)_{estatica}} \quad (3.17)$$

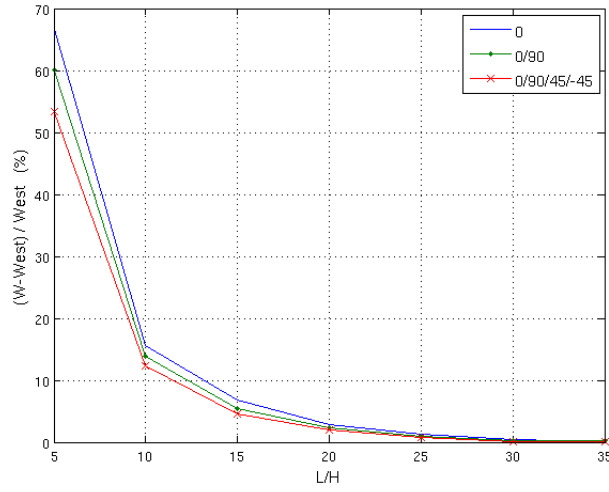


Figura 3.8: Diferencias entre la flecha estática y dinámica

La figura 3.8 recoge los resultados expresados en tanto por ciento frente al ratio de esbeltez $\frac{L}{H}$. Se observa que a partir de un ratio de esbeltez $\frac{L}{H} = 30$ las diferencias entre las flechas del modelo dinámico, que considera las tensiones de cortadura y las fuerzas de inercia, y las flechas del modelo estático que no las tienen en cuenta, son menores del 1 por ciento. Entre el rango de $\frac{L}{H}$ comprendido entre 10 y 30 las diferencias entre las flechas son menores del 15 por ciento, en este rango el modelo estático deja de ser aplicable y se incrementan las diferencias. Por debajo de un ratio de esbeltez de 10 se puede ver que las diferencias crecen rápidamente. Además se observa como las diferencias entre las flechas decrecen al aumentar el grado de isotropía, así las diferencias son mas altas para el laminado unidireccional, intermedias para el laminado ortótropo y mas pequeñas para el laminado cuasi-isótropo.

3.4. Influencia de la velocidad de aplicación de la carga.

En este apartado se fijarán unas condiciones geométricas y se estudiará como afecta la velocidad de aplicación de la carga a las diferencias entre los modelos. En el apartado anterior se ha visto que para tiempos de aplicación de carga altos las

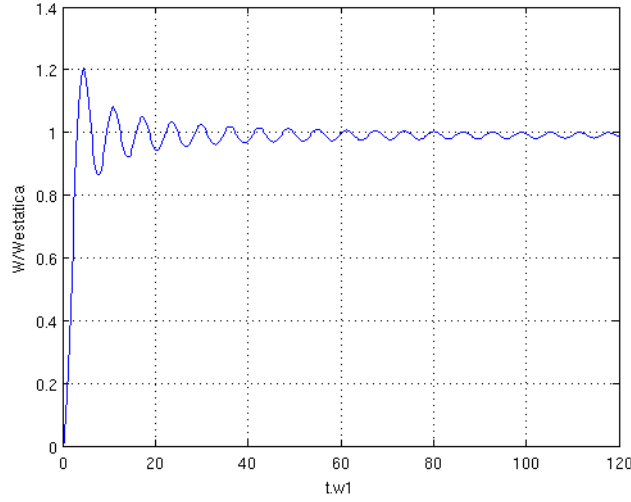


Figura 3.9: Influencia de la velocidad de aplicación de la carga $\frac{w}{w_{estatica}}$

diferencias entre las flechas dinámica y estática se minimizan para ratios de esbeltez mayores de 30.

Se utilizará como ejemplo un laminado cuasi-isótropo $[0, 90, 45, -45]_S$, la geometría será la misma que en los ensayos experimentales, $L = 80mm$, $B = 20mm$, $H = 1,6mm$ con lo que el ratio de esbeltez es $\frac{L}{H} = 50$. Como se ha visto en el apartado anterior el laminado cuasi-isótropo para un ratio de esbeltez mayor de 30 es el que presenta menores diferencias entre las flechas de la sección media de la viga.

Se aplicará la misma carga puntual en la sección central de la viga que en el apartado anterior $f(x, t) = \frac{F_r}{t_r}t$ con $F_r = 100N$ y un tiempo de aplicación t_r variable. Para comprobar la influencia de t_r se calcularán los cocientes $\frac{w}{w_{estatica}}$, flecha del modelo dinámico entre la flecha del modelo estático, y $\frac{R}{R_{estatico}}$ donde R es el coeficiente del criterio de Tsai-Hill (estático o dinámico) correspondiente a la lámina con mayor valor de R . En este caso es la primera lámina a 90° , en la mitad inferior del laminado, sometida a tensión de tracción en la dirección x .

Los valores de estos cocientes en función del tiempo de aplicación de la carga están representados en la figuras 3.9 y 3.10. El tiempo ha sido adimensionalizado multiplicando por la primera frecuencia propia w_1 , el rango de tiempos considerado ha sido desde $0,1\mu s$ a $25ms$.

En la primera gráfica se observa como el cociente $\frac{w}{w_{estatica}}$ tiende a cero para valores de

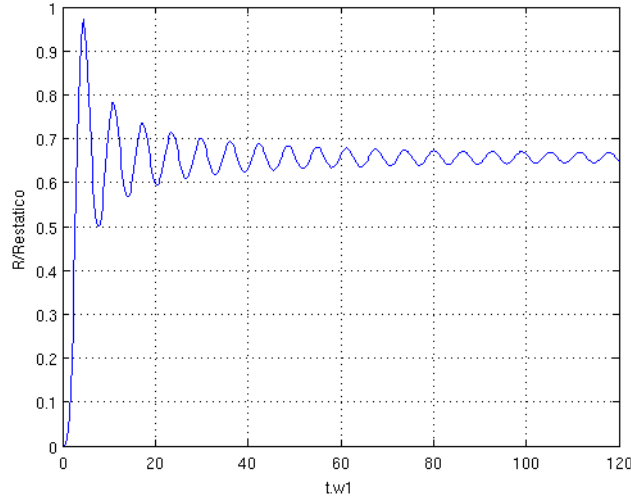


Figura 3.10: Influencia de la velocidad de aplicación de la carga $\frac{R}{R_{estatico}}$

t pequeños, comenzando entonces a incrementarse y tras alcanzar un valor máximo oscila asintóticamente a uno. De aquí es posible deducir que para tiempos mayores de $t.w_1 > 40$ ($t > 8\text{ ms}$) los modelos estático y dinámico se diferencian en menos de un cinco por ciento. Por debajo de el valor de tiempo correspondiente al valor máximo $t.w_1 = 4,14$ ($t < 0,85\text{ ms}$) el modelo dinámico deja de ser aplicable.

La segunda gráfica presenta un comportamiento similar para el cociente $\frac{R}{R_{estatico}}$ frente al tiempo adimensionalizado con la primera frecuencia propia. Tras un tramo ascendente desde cero se alcanza el valor máximo del cociente para después oscilar asintóticamente a 0.65. Este valor es menor que uno porque el momento en la sección central de la viga que proporciona las ecuaciones de Euler, para una viga biapoyada sometida a carga puntual estática en su centro, es mayor que el de la teoría de cortadura-Timoshenko y consecuentemente las tensiones del modelo estático que se introducen en el criterio de rotura son mayores que las del dinámico. Al igual que en el caso de la flecha en la sección media de la viga, las diferencias entre los coeficientes de Tsai-Hill se hacen mínimas a partir de tiempos mayores de $t.w_1 > 40$ ($t > 8\text{ ms}$). Al igual que en la flecha el máximo local se da para un tiempo $t.w_1 = 4,14$ ($t = 0,85\text{ ms}$).

3.5. Ejemplo de aplicación

En este apartado se describen los resultados que proporciona el programa informático y que han sido usados en los apartados anteriores. Se utiliza de nuevo de nuevo el laminado cuasi-isótropo $[0, 90, 45, -45]_S$, con las condiciones geométricas ya descritas. El material al igual que en los casos anteriores será AS4/3501-6, coincidiendo con el material de las probetas de los ensayos experimentales.

La viga laminada esta biapoyada de acuerdo a la figura 3.2. De nuevo la carga sera puntual, variable en el tiempo de tipo triangular, y situada en la sección media de la viga. Se considerará un valor final de la fuerza de $F = 100\text{ N}$, para un tiempo de aplicación de la carga de $t = 1\text{ ms}$.

En primer lugar el modelo informático lee los datos geométricos y del material de un archivo Excel, después calcula las matrices de rigidez de cada lamina. En este caso el material es el mismo en todas las laminas por lo que la matriz de rigidez en ejes locales es única.

$$\{Q\} = \begin{bmatrix} 126,87 & 3,1 & 0 \\ 3,1 & 11,08 & 0 \\ 0 & 0 & 6,6 \end{bmatrix} (GPa)$$

Después el programa debe calcular las matrices de rigidez en ejes globales.

$$\{\bar{Q}\}_0 = \begin{bmatrix} 126,87 & 3,1 & 0 \\ 3,1 & 11,08 & 0 \\ 0 & 0 & 6,6 \end{bmatrix} (GPa)$$

$$\{\bar{Q}\}_{90} = \begin{bmatrix} 11,08 & 3,1 & 0 \\ 3,1 & 126,87 & 0 \\ 0 & 0 & 6,6 \end{bmatrix} (GPa)$$

$$\{\bar{Q}\}_{45} = \begin{bmatrix} 42,64 & 29,44 & 28,95 \\ 29,44 & 42,64 & 28,95 \\ 28,95 & 28,95 & 32,94 \end{bmatrix} (GPa)$$

$$\{\bar{Q}\}_{-45} = \begin{bmatrix} 42,64 & 29,44 & -28,95 \\ 29,44 & 42,64 & -28,95 \\ -28,95 & -28,95 & 32,94 \end{bmatrix} (GPa)$$

Conocidas las matrices de rigidez en ejes globales se calculan las matrices de rigidez a flexión y cortadura D y C , que permiten calcular los parámetros globales del laminado E_x y G_{xz} .

$$\{D\} = \begin{bmatrix} 24,75 & 1,93 & 0,82 \\ 1,93 & 14,92 & 0,82 \\ 0,82 & 0,825 & 2,98 \end{bmatrix} (GPa.m^3)$$

$$\{C\} = \begin{bmatrix} 3,93 & 0 \\ 0 & 6,6 \end{bmatrix} (GPa.m)$$

$$E_x = 80,56 (GPa)$$

$$G_{xz} = 5,26 (GPa)$$

Posteriormente el programa calcula parámetros que se necesitarán mas tarde como el área transversal A , el momento de inercia I_x respecto al eje x , ... En este paso además se divide la longitud de la viga en un numero suficiente de puntos para calcular posteriormente las derivadas de los desplazamientos por el método de diferencias divididas, este parámetro es configurable a través del archivo Excel inicial, en este caso la viga se ha dividido en cien puntos.

A continuación el programa calcula los desplazamientos y sus derivadas para calcular los esfuerzos. En las figuras 3.11 y 3.12 se muestran el desplazamiento vertical y el giro que sufren las secciones de la viga en los casos dinámico y estático. En este caso los desplazamientos verticales máximos son $w = 2,6 mm$ y $w_{estatica} = 2,2 mm$ para el modelo dinámico y estático respectivamente. Los valores máximos del giro de las secciones se experimentan en los extremos de la viga y son $\phi = \pm 0,102 rad$ y $\phi = \pm 0,082 rad$.

Calculadas las derivadas de los desplazamientos de forma numérica el programa

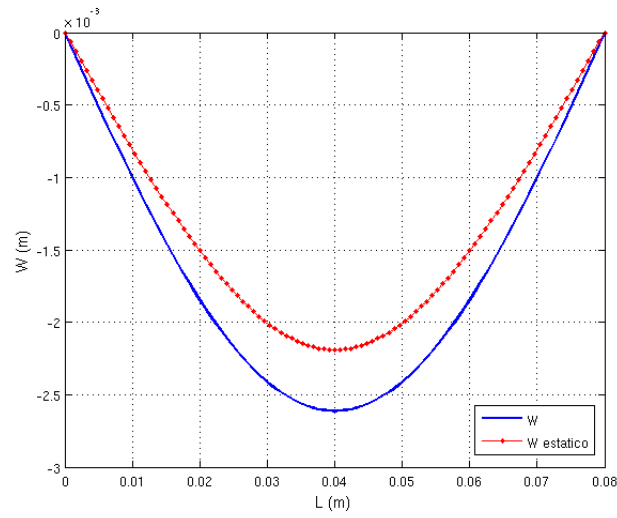


Figura 3.11: Ejemplo. Desplazamiento vertical

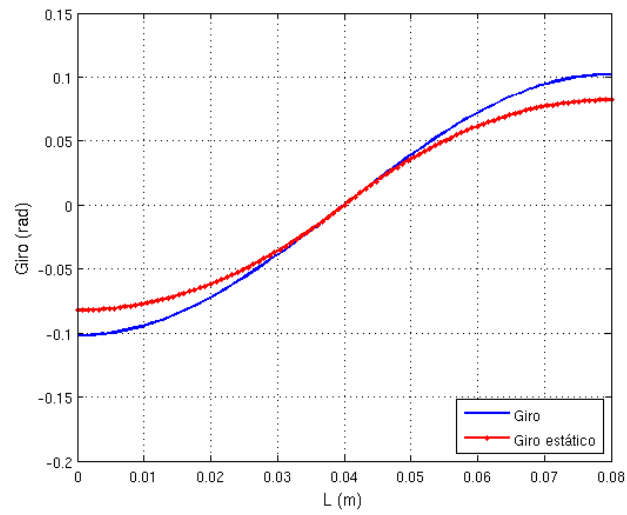


Figura 3.12: Ejemplo. Giro de las secciones

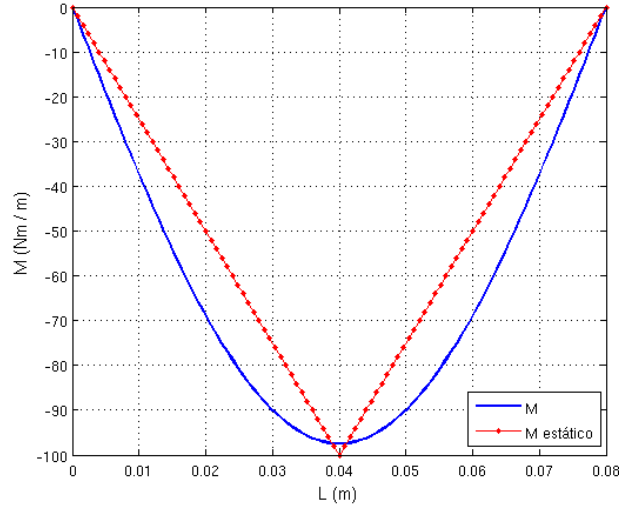


Figura 3.13: Ejemplo. Momento flector

calcula los esfuerzos por unidad de anchura de la viga. Para el caso tomado como ejemplo se pueden observar los resultados de el momento flector y el esfuerzo cortante que experimenta la viga en las figuras 3.13 y 3.14. Los valores máximos del momento flector en la sección central de la viga son para el caso dinámico y el caso estático: $M = 97 \frac{Nm}{m}$ y $M_{estatico} = 100 \frac{Nm}{m}$. En la figura 3.13 se observa como el momento estático que proporcionan las ecuaciones de Euler es de tipo triangular y presenta un valor mayor en la sección central de la viga. Los valores máximos para el esfuerzo cortante son respectivamente $Q = 3713 \frac{N}{m}$ y $Q_{estatico} = 2500 \frac{N}{m}$.

Conocidos los esfuerzos el programa calcula las inversas de las matrices D y C para obtener el vector de curvaturas κ y las deformaciones angulares γ_{yz} y γ_{xz} . El resto de las deformaciones se calculan multiplicando el vector de curvaturas por la altura de cada lamina, $\varepsilon = z \cdot \{\kappa\}$. Conocidas las deformaciones se calculan las tensiones en ejes globales de la lámina multiplicando las deformaciones por las matrices de rigidez de cada lámina.

Para aplicar el criterio de rotura el programa cambia las tensiones de ejes globales a ejes locales multiplicando por las correspondientes matrices de cambio de base. Finalmente las tensiones en ejes locales que se obtienen para el modelo dinámico, en la sección central de la viga, en cada una de las láminas expresadas en MPa son:

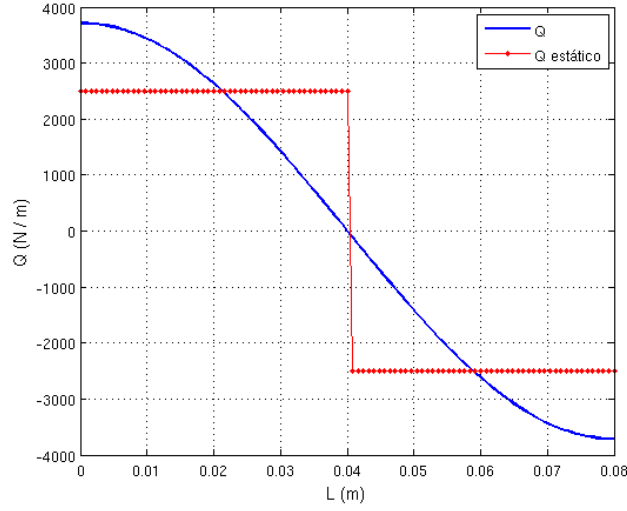


Figura 3.14: Ejemplo. Esfuerzo cortante

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 389 \\ 5,6 \\ 4,9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -26,8 \\ 24,7 \\ 3,7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 65,2 \\ 11,1 \\ -11,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 55,7 \\ 4,1 \\ 5,7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -55,7 \\ -4,1 \\ -5,7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -65,2 \\ -11,1 \\ 11,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 26,8 \\ -24,7 \\ -3,7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -389 \\ -5,6 \\ 4,9 \end{pmatrix}$$

Las tensiones de cortadura τ_{yz} y τ_{xz} consideradas en el modelo dinámico deberían anularse en la sección central de la viga por la simetría del problema. Los valores que proporciona el modelo para el laminado usado como ejemplo, expresados en $10^{-7} Pa$ son:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,41 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,24 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,17 \\ -0,29 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,17 \\ -0,29 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,17 \\ -0,29 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,17 \\ -0,29 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,24 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -0,41 \end{pmatrix}$$

Siguiendo los mismos pasos el programa proporciona las tensiones en ejes locales para cada lámina que genera la fuerza estática en la viga. Los valores son mayores que los correspondientes al caso dinámico debido al mayor valor en la sección central del momento flector que proporcionan las ecuaciones de Euler.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_{est} = \begin{pmatrix} 399 \\ 5,7 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -27,5 \\ 25,3 \\ 3,8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 66,9 \\ 11,4 \\ -11,6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 55,7 \\ 4,2 \\ 5,8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -57,1 \\ -4,2 \\ -5,8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -66,9 \\ -11,4 \\ 11,6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 27,5 \\ -25,3 \\ -3,8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -399 \\ -5,67 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Conocidas las tensiones en ejes locales el programa calcula el criterio de rotura de Tsai Hill para cada lámina. El programa puede terminar de dos maneras, cuando el criterio de Tsai Hill determina la rotura de la primera lámina o cuando se alcanza el tiempo máximo (la fuerza externa máxima) que haya sido prefijado, siempre que el laminado no haya alcanzado la rotura primero. El tiempo máximo que se desea alcanzar es configurable mediante el archivo Excel que introduce los parámetros iniciales del modelo. Para el ejemplo estudiado los valores de los coeficientes del criterio de rotura en cada lamina para los casos estáticos y dinámicos son:

$$\{R\} = (0,056) , (0,26) , (0,075) , (0,013) , (0,006) , (0,025) , (0,017) , (0,072)$$

$$\{R\}_{estatico} = (0,059) , (0,28) , (0,079) , (0,014) , (0,007) , (0,026) , (0,018) , (0,076)$$

Los máximos valores de R se observan en la lámina orientada a 90 grados en la mitad inferior del laminado. Esta lámina presenta una tensión de compresión de 27 MPa en la dirección longitudinal (1) y una tensión de tracción de 25 MPa en la dirección ortogonal (2). Esto es debido a que el menor valor de resistencia del material se da la dirección ortogonal a la fibras, para tensiones de tracción, $Y_T = 48 \text{ MPa}$, como se puede comprobar en la Tabla 3.1.

Capítulo 4

Conclusiones y trabajos futuros

4.1. Resumen y conclusiones

En el presente trabajo se ha desarrollado la teoría necesaria para conocer el estado tensional de vigas de tipo laminado sometidas a cargas dinámicas que generen esfuerzos de flexión.

Para conocer los desplazamientos que tienen lugar en la viga por efecto de las cargas dinámicas se han deducido las ecuaciones de Timoshenko. Se han hallado las soluciones a las ecuaciones para dos tipos de configuraciones: viga biapoyada y viga en voladizo.

Tras desarrollar el modelo teórico se ha implementado un programa informático escrito en MATLAB para la configuración de viga biapoyada. El programa es configurable en sus parámetros de entrada, tales como: materiales, geometría, secuencia de apilamiento, etc.

Se ha validado el código informático frente a registros fuerza-tiempo procedentes de ensayos experimentales de impacto a flexión en tres puntos sobre probetas de tipo laminado. Se ha comprobado que el modelo y los datos experimentales proporcionan valores similares de tiempos y fuerzas de rotura. Los márgenes de error son pequeños con valores que varían entre el uno y el siete por ciento.

Se han calculado los desplazamientos que experimentan las probetas ensayadas mediante integración de los registros fuerza tiempo y se han comparado los datos con los desplazamientos obtenidos en el programa informático. Se ha observado que las

diferencias en los desplazamientos son mayores que las diferencias entre las fuerzas y tiempos de rotura. Los márgenes de error para los desplazamientos obtenidos mediante el programa y la integración de los datos experimentales varían entre un catorce y un veintitrés por ciento.

- Se puede concluir que:
 - La validez del modelo desarrollado ha sido contrastada, reproduciendo éste la realidad observada en los ensayos experimentales.
 - Se considera por tanto como alcanzado el objetivo principal de este trabajo: Obtener un modelo simplificado que permita conocer el estado tensional de vigas formadas por láminas de material compuesto sometidas a cargas externas dinámicas que generen esfuerzos de flexión.

Se ha ejecutado el programa con un tiempo de aplicación de la carga lento para poder realizar comparaciones con el caso estático equivalente. Se ha podido comprobar que a partir de un cierto valor del ratio de esbeltez las diferencias entre los valores de la flecha que proporcionan ambos modelos tiende a cero. Se comprueba por tanto que existe un valor crítico de $\frac{L}{H}$ para el que el modelo dinámico, basado en la teoría de cortadura y las ecuaciones de Timoshenko, converge al modelo estático, basado en la teoría clásica del laminado y las ecuaciones de Euler. Se ha encontrado que para el material empleado AS4/3501-6 este valor es $\frac{L}{H} = 30$.

Del mismo modo ejecutando el programa para tres secuencias de apilamiento distintas se ha comprobado que las diferencias entre el modelo estático y dinámico aumentan al aumentar el grado de anisotropía del laminado.

- Se puede concluir que:
 - El modelo simplificado basado en la teoría de cortadura converge al modelo clásico de la teoría del laminado para vigas ideales como cabía esperar.
 - Existe un valor crítico de la esbeltez de la viga por debajo del cual la relevancia de las tensiones de cortadura aumenta y la teoría clásica deja de ser aplicable, debiendo ésta ser sustituida por el modelo desarrollado en este trabajo.

- A medida que aumenta el grado de anisotropía del laminado mayor es la influencia de las tensiones de cortadura consideradas en el modelo, aumentando la validez de éste en detrimento de la teoría clásica del laminado.

Se ha ejecutado el programa manteniendo el valor final de la carga constante pero variando el tiempo de aplicación de la misma, con objeto de comparar los valores de desplazamiento vertical y coeficiente del criterio de rotura entre los modelos estático y dinámico en función de la velocidad de aplicación de la carga. Se ha encontrado que a partir de un cierto instante de tiempo los valores que proporcionan ambos modelos convergen. Para la geometría y los materiales empleados las diferencias se hacen menores del cinco por ciento a partir de un tiempo de aplicación de la carga de aproximadamente 8 milisegundos. El valor del cociente entre los coeficientes del criterio de rotura de los modelos dinámico y estático presenta el mismo comportamiento. Para ambos cocientes se alcanza un valor máximo para un tiempo de 0.85 milisegundos, para tiempos menores los valores de ambos cocientes decrecen rápidamente hasta cero.

■ Se puede concluir que:

- La velocidad de aplicación de la carga influye en el modelo a elegir para conocer el estado tensional de la viga. Para tiempos de aplicación de la carga muy altos (problema cuasi-estático) el modelo desarrollado y la teoría clásica convergen. Para tiempos de aplicación de la carga muy cortos, el modelo desarrollado debe ser sustituido por un modelo de impacto a alta velocidad.
- El modelo simplificado desarrollado proporciona tensiones de rotura más ajustadas a la realidad que la teoría clásica del laminado, ya que ésta al considerar esfuerzos lineales subestima la resistencia de las vigas proporcionando valores del coeficiente del criterio de rotura superiores a los del modelo.

4.2. Trabajos futuros

A continuación se proponen líneas de trabajo que permitan ampliar el presente trabajo:

- Se han resuelto las ecuaciones de Timoshenko para condiciones de apoyo en los extremos de la viga de tipo apoyado-apoyado y empotrado-libre. Puede extenderse el modelo resolviendo las ecuaciones para otro tipo de configuraciones tales como empotrado-empotrado, apoyado-deslizante, etc.
- Se han considerado cargas exteriores dinámicas que generen esfuerzos de flexión. El modelo desarrollado puede ser extendido para contemplar otros estados de carga o acoplamiento entre ellos, tales como flexión-torsión, flexión-tracción, etc.
- Se ha validado el modelo frente a ensayos experimentales con los datos de desplazamientos calculados de manera indirecta. Se podrían comparar los desplazamientos calculados por el modelo con desplazamientos experimentales medidos de manera directa y comprobar si se reducen las diferencias entre los mismos.

Como extensiones adicionales a este proyecto sería interesante profundizar en las siguientes líneas de trabajo:

- Modelos de impacto o aplicación de la carga a altas velocidades que permitan ampliar el rango de tiempos en que se pueda estudiar el comportamiento de las vigas estudiadas.
- Comparar el modelo desarrollado frente a un modelo basado en elementos finitos y ambos frente a ensayos experimentales y estudiar para los distintos casos el binomio precisión-complejidad o esfuerzo invertido.

Apéndice A

Anexos

A.1. Programa informático

En este apartado se transcribe el código informático escrito en MATLAB resultante de la teoría desarrollada en este trabajo. El código has sido desarrollado de manera modular mediante distintas funciones que permitan su reutilización y una más fácil modificación.

Los datos de las láminas, geometría, etc. . . se proporcionan al programa mediante un archivo excel, al final de este anexo se reproduce una archivo usado en este trabajo como ejemplo.

La función principal que inicia el programa es la función *cargar* que va llamando al resto de funciones y ejecutando los pasos descritos en el capítulo 3.

Además se incluye la función *fuerza* que calcula los desplazamientos de los datos experimentales tal como se ha descrito en la sección 3.2.1

A.1.1. Funciones

Función cargar

```
function [lam,dat,mat,des,esf,ten,R,R_est,t]=cargar(excel)

%INTRODUCCION. Programa para calcular el estado tensional de
%una viga laminada de material compuesto biapoyada sometida a
```

```

% una carga dinamica. Se utiliza el criterio de Tsai-Hill como
% criterio de rotura.

% Leer datos de las laminas y geometria de un archivo excel(97-2003)
[lam,dat]=cargardatos(excel);

% Calcular matrices Q,Qxy,P,Pxy y finalmente D y A
[mat]=matrices(lam);

% Calcular area, moment inercia, E, G, ...
[dat]=calculosprevios(dat,lam,mat);

% Comienzan las iteraciones para calcular desplazamientos,
% esfuerzos, tensiones y aplicar Tsai-Hill
t=0;

for t=0:dat.At:dat.tmax

% Desplazamientos (Ecuaciones de Timoshenko)
[des]=desplaz_biapoyada(dat,t);

% Esfuerzos
[esf,k,giro]=esf_biapoyada(des,dat,mat);

% Tensiones y deformaciones
[ten]=tensiones(lam,mat,k,giro);

% Criterio de rotura
[R] = TsaiHill(ten,lam);

% Comprobar si hay rotura
m=length(R);
% if max(R)>1
    disp('Ha roto la primera lamina');
    break
end
end

% Aplicar la misma carga a el caso estatico equivalente
dat.F_est=(dat.F*t/dat.tc);

% Desplazamientos del caso esttico
[des]=desplaz_estatico(dat,des);

% Esfuerzos caso esttico
[esf,k_est]=esf_estatico(dat,mat,esf);

% Tensiones y deformaciones caso esttico
[ten]=ten_estatico(lam,mat,k_est,ten);

% Coeficientes de Tsai-Hill caso esttico
[R_est] = TsaiHill_estatico(ten,lam);

```

Función cargar datos

```
function [lam,dat]=cargardatos(excel)

%Cargar datos de laminas
aux=xlsread(excel);

lam.E1=aux(1,:);
lam.E2=aux(2,:);
lam.G12=aux(3,:);
lam.G23=aux(4,:);
lam.G13=aux(5,:);
lam.h=aux(6,:);
lam.ang=aux(7,:);
lam.den=aux(8,:);
lam.TXt=aux(9,:);
lam.TXc=aux(10,:);
lam.TYt=aux(11,:);
lam.TYc=aux(12,:);
lam.TZ=aux(13,:);
lam.TS12=aux(14,:);
lam.TS23=aux(15,:);
lam.TS13=aux(16,:);
lam.u21=aux(17,:);

%Cargar datos del laminado
aux2=xlsread(excel,'laminado');

dat.L=aux2(1,1);
dat.B=aux2(2,1);
dat.puntos=aux2(3,1);
dat.K=aux2(4,1);
dat.At=aux2(5,1);
dat.winicial=aux2(6,1);
dat.dwinicial=aux(7,1);
dat.F=aux2(8,1);
dat.tc=aux2(9,1);
dat.tmax=aux2(10,1);

%Numero de laminas
m=length(lam.ang);

% Existe lamina media de simetria?
if rem(m,2)~=0
    dat.sim=ceil(m/2);
else
    dat.sim=0;
end

%Vector z con origen en el medio del laminado
if dat.sim == 0
    H=0;
```



```

    for i=1:(m/2)
        H=H+lam.h(i);
    end
else
    H=0;
    for i=1:(dat.sim-1)
        H=H+lam.h(i);
    end
    H=H+(lam.h(dat.sim)/2);
end

lam.z(1)=-H;

for i=1:m
    lam.z(i+1)=lam.h(i)+lam.z(i);
end

%Espesor del laminado
t=0;
for i=1:m
    t=t+lam.h(i);
end
dat.H=t;

% Calcular densidad media del laminado
dat.den=0;
for i=1:m
    dat.den=dat.den + lam.den(i)*lam.h(i);
end
dat.den=dat.den/dat.H;

```

Función matrices

```
function [mat]=matrices(lam)

% Numero de laminas
l=length(lam.E1);

% Calcular matrices Q
mat=matQ(lam);

% Calcular matrices Qxy y matriz de rigidez a flexion D
D=zeros(3);
for i=1:l
    mat.Qxy(:, :, i)=matQxy(mat.Q(:, :, i), lam.ang(i));
    D0=(lam.z(i+1)^3-lam.z(i)^3)*mat.Qxy(:, :, i);
    D=D+D0;
end
mat.D=(D/3);

% Calcular matrices P
mat=matP(lam, mat);

% Calcular matrices Pxy y matriz de rigidez a cortadura A
A=zeros(2);
for i=1:l
    mat.Pxy(:, :, i)=matPxy(mat.P(:, :, i), lam.ang(i));
    A0=(lam.z(i+1)-lam.z(i))*mat.Pxy(:, :, i);
    A=A+A0;
end
mat.A=A;
```

Función cálculos previos

```
function [dat]=calculosprevios(dat,lam,mat)

% Matrices inversas de D y A
d=inv(mat.D);
a=inv(mat.A);

% G y E del laminado
dat.E=12/(dat.H^3*d(1,1));
dat.G=1/(dat.H*a(2,2));

% Otros parametros necesarios
dat.A=dat.B*dat.H;
dat.I=(1/12)*dat.B*dat.H^3;
dat.Ax=dat.L/dat.puntos;
dat.x=[0:dat.Ax:dat.L];
dat.gamma=(dat.E/(dat.G*dat.K))^0.5;
dat.s=(dat.A/dat.I)^0.5;
dat.ac=dat.s*((1/dat.gamma^2)+1)^0.5;
```

Función desplaz_biapoyada

```
function [des]=desplaz_biapoyada(dat,t)

% Funcion para calcular los desplazamientos de una viga biapoyada
% sometida a una carga puntual, para calcular con una fuerza distribuida
% ver anotacion mas abajo. Los desplazamientos estan calculados
% mediante las ecuaciones de Timoshenko. Se calculan las derivadas de
% los desplazamientos

B=dat.B; K=dat.K; L=dat.L; den=dat.den; F=(dat.F/dat.tc); Ac=dat.Ac; I=dat.I;
E=dat.E; G=dat.G; x=dat.x; Ax=dat.Ax; ac=dat.ac;
s=dat.s; g=dat.gamma; winicial=dat.winicial; dwinicial=dat.dwinicial;

w=0;
phi=0;

% Comienzan las iteraciones
for n=1:1000
    w0=w;
    phi0=phi;

    % Numero de onda a
    a=n*pi/L;

    aa=g^2;
    bb=(a^2*g^4)+a^2+s^2+(g^2*s^2);
    cc=(a^4*g^2)-(a^2*s^2)-(a^2*s^2*g^2);

    % Si a es menor que a critico
    if a<=ac

        % Numero de onda b
        b=((-bb+(bb^2-4*aa*cc)^0.5)/(2*aa))^0.5;
        alfa=(a^2+(b^2*g^2))/((1+g^2)*a);

        % Frecuencia natural n
        wn=((E*(a^2-b^2))/(den*(1+g^2)))^0.5;
        if n==1
            des.w1=wn;
        end

        % Coeficiente constante de la solucion espacial
        C1=(2/(L*(den*Ac+den*I*alfa^2)))^0.5;

        % Solucion espacial del desplazamiento vertical
        p=C1*sin(a*x);

        % Solucion espacial del giro
        r=alfa*C1*cos(a*x);
    end
end
```

```

% Si a es mayor que a critico
elseif a>ac

    b=((bb-(bb^2-4*aa*cc)^0.5)/(2*aa))^0.5;
    alfa=(a^2-(b^2*g^2))/((1+g^2)*a);
    wn=((E*(a^2+b^2))/(den*(1+g^2)))^0.5;
    if n==1
        des.wl=wn;
    end
    C1=(2/(L*(den*Ac+den*I*alfa^2)))^0.5;

    p=C1*sin(a*x);
    r=alfa*C1*cos(a*x);
end

aux=(1-cos(n*pi));

% Parte de ls solucion temporal asociada al
% desplazamiento inicial
q0=((C1*den*Ac*winicial)/a)*aux;

% Parte de ls solucion temporal asociada a la derivada
% del desplazamiento inicial
dq0=((C1*den*Ac*dwinicial)/a)*aux;

% Fuerza que interviene en la ecuacion temporal para
% una carga puntual. Para calcular con carga distribuida
% cambiar por F=((C1*F)/(wn^2))*(1-cos(n*pi));
F=((C1*F)/(wn^2))*sin(n*pi/2);

% Solucion temporal
q=F*t -((F/wn)*sin(wn*t)) + (dq0/wn)*sin(wn*t) + q0*cos(wn*t);

% Soluciones generales para el giro y desplazamiento vertical
phi=phi+r*q;
w=w+p*q;

error=norm(w-w0);
if error<1e-6
    break
end
end

% Calculo de las derivadas de los desplazamientos w y phi

```

```
wx=zeros(1,(dat.puntos+1));
phix=zeros(1,(dat.puntos+1));
for i=2:dat.puntos
    wx(i)=(w(i+1)-w(i-1))/(2*Ax);
    phix(i)=(phi(i+1)-phi(i-1))/(2*Ax);
end
wx(1)=(w(2)-w(1))/Ax;
wx(dat.puntos+1)=-(w(dat.puntos)-w(dat.puntos+1))/Ax;

des.w=w;
des.phi=phi;
des.wx=wx;
des.phix=phix;

medio=(round(dat.puntos/2)+1);

% Desplazamientos maximos
des.wmax=des.w(medio);
des.phimax=des.phi(1);
```

Función `esf_biapoyada`

```
function [esf,k,giro]=esf_biapoyada(des,dat,mat)

% Funcion para calcular los esfuerzos en una viga biapoyada
% sometida a carga puntual dinamica en su seccion central a
% traves de las derivadas de los desplazamientos calculados
% por las ecuaciones de Timoshenko

B=dat.B; K=dat.K; Ac=dat.A; I=dat.I; E=dat.E; G=dat.G; D=mat.D; A=mat.A;

esf.Mmed=zeros(1,3);
esf.Qmed=zeros(1,2);

% Momento flector
esf.M=-E*I*des.phix/B;
% Cortante
esf.Q=K*G*Ac*(des.phi-des.wx)/B;

% Particularizar en el punto medio
punto=(round(dat.puntos/2)+1);

esf.Mmed(1,1)=esf.M(punto);
esf.Qmed(1,2)=esf.Q(punto);

% Kx, Ky, Kxy
k=inv(D)*esf.Mmed';

% Txz, Tyz
giro=inv(A)*esf.Qmed';
giro=giro/K;
```

Función tensiones

```
function [ten]=tensiones(lam,mat,k,giro)

%funcion para calcular tensiones y desplazamientos
%segun la teiria de cortadura de primer orden

%Numero de laminas
n=length(lam.h);

ten.k=k;
ten.giro=giro;
ten.exy=zeros(3,1,n);
ten.spxy=zeros(2,1,n);
ten.sqxy=zeros(3,1,n);
ten.sp=zeros(2,1,n);
ten.sq=zeros(3,1,n);

for i=1:n

if lam.z(i)<-1e-12 % Parte inferior del laminado

    % ex , ey , exy
    ten.exy(:, :, i)=lam.z(i)*k;

else % Parte superior del laminado

    % ex , ey , exy
    ten.exy(:, :, i)=lam.z(i+1)*k;

end

Tpi=Tpinv(lam.ang(i));
Tqi=Tqinv(lam.ang(i));

% Tensiones en ejes globales
ten.sqxy(:, :, i)=mat.Qxy(:, :, i)*ten.exy(:, :, i);
ten.spxy(:, :, i)=mat.Pxy(:, :, i)*giro;

% Tensiones en ejes locales
ten.sq(:, :, i)=Tqi*ten.sqxy(:, :, i);    %en ejes locales
ten.sp(:, :, i)=Tpi*ten.spxy(:, :, i);

end
```


Función TsaiHill

```
function [R] = TsaiHill(ten,lam)

% Criterio de rotura de Tsai-Hill para la teoria de cortadura
% de primer orden - Ecuaciones de Timoshenko

n=length(lam.h);

for i=1:n

    if ten.sq(1,1,i)>=0
        TX=lam.TXt(i);
    else
        TX=lam.TXc(i);
    end

    if ten.sq(2,1,i)>=0
        TY=lam.TYt(i);
    else
        TY=lam.TYc(i);
    end

    R(i)= (ten.sq(1,1,i)/TX)^2 + (ten.sq(2,1,i)/TY)^2 - ten.sq(1,1,i)
        *ten.sq(2,1,i)*((1/TX)^2) + (ten.sq(3,1,i)/lam.TS12(i))^2
        +(ten.sp(1,1,i)/lam.TS23(i))^2 + (ten.sp(2,1,i)/lam.TS13(i))^2;

end
```

Función desplaz_estatico

```
function [des]=desplaz_biapoyada(dat,des)

% Funcion para calcular los desplazamientos de una viga biapoyada
% con carga puntual estatica en su centro mediante las ecuaciones de
% Euler-Bernoulli

L=dat.L; F=dat.F_est; I=dat.I;
E=dat.E; x=dat.x;

punto=(round(dat.puntos/2)+1);

for i=1:(dat.puntos+1)

    if x(i)<=x(punto)

        des.w_est(i)=(F*x(i))/(48*E*I)*((3*L^2)-(4*x(i)^2));
        des.phi_est(i)=(F/(16*E*I))*(L^2-(4*x(i)^2));

    else

        des.w_est(i)=-((F*(L-x(i)))/(48*E*I))*(L^2-(8*x(i)*L)+(4*x(i)^2));
        des.phi_est(i)=-(F*(3*L-(2*x(i)))*(2*x(i)-L))/(16*E*I);

    end

end

% Desplazamientos maximos
des.wmax_est=((F*L^3)/(48*E*I));
des.phimax_est=(F*L^2)/(16*E*I);
```

Función `esf_estatico`

```
function [esf,k_est]=esf_biapoyada(dat,mat,esf)

% Funcion para calcular los esfuerzos en una viga biapoyada
% sometida a carga puntual estatica en su seccion central
% mediante las ecuaciones de Euler

L=dat.L; F=dat.F_est; I=dat.I;
E=dat.E; x=dat.x;

punto=(round(dat.puntos/2)+1);

for i=1:(dat.puntos+1)

    if x(i)<=x(punto)

        esf.M_est(i)=(F*x(i))/2;
        esf.Q_est(i)=-F/2;

    else
        esf.M_est(i)=(F*(L-x(i)))/2;
        esf.Q_est(i)=F/2;
    end
end

% Momento y cortante
esf.M_est=esf.M_est/dat.B;
esf.Q_est=esf.Q_est/dat.B;

esf.Mmed_est=zeros(1,3);

% Momento en la seccion central
esf.Mmed_est(1,1)=esf.M_est(punto);

% Kx,Ky,Kxy
k_est=inv(mat.D)*esf.Mmed_est';
```

Función `ten_estatico`

```
function [ten,R]=ten_estatico(lam,mat,k,ten)

%funcion para calcular tensiones y desplazamientos
%segun la teoria de cortadura de primer orden

%Numero de laminas
n=length(lam.h);

ten.k_est=k;
ten.exy_est=zeros(3,1,n);
ten.sqxy_est=zeros(3,1,n);
ten.sq_est=zeros(3,1,n);

for i=1:n

if lam.z(i)<0 % Parte inferior del laminado

    % ex,ey,exy
    ten.exy_est(:, :, i)=lam.z(i)*k;

else % Parte superior del laminado

    % ex,ey,exy
    ten.exy_est(:, :, i)=lam.z(i+1)*k;

end

Tqi=Tqinv(lam.ang(i));

% Tensiones en ejes globales
ten.sqxy_est(:, :, i)=mat.Qxy(:, :, i)*ten.exy_est(:, :, i);

% Tensiones en ejes locales
ten.sq_est(:, :, i)=Tqi*ten.sqxy_est(:, :, i);

end
```

Función TsaiHill_estatico

```
function [R] = TsaiHill_estatico(ten,lam)

% Criterio de rotura de Tsai-Hill para la teoria clasica
% del laminado - Ecuaciones de Euler

n=length(lam.h);

for i=1:n

    if ten.sq_est(1,1,i)>=0
        TX=lam.TXt(i);
    else
        TX=lam.TXc(i);
    end

    if ten.sq_est(2,1,i)>=0
        TY=lam.TYt(i);
    else
        TY=lam.TYc(i);
    end

    R(i)= (ten.sq_est(1,1,i)/TX)^2 + (ten.sq_est(2,1,i)/TY)^2 - ten.sq_est(1,1,i)*...
        ten.sq_est(2,1,i)*((1/TX)^2) + (ten.sq_est(3,1,i)/lam.TS12(i))^2;

end
```

Función matQ

```
function mat = matQ(lam)

% Matrices de rigidez del laminado en ejes locales

l=length(lam.E1);
mat.Q=zeros(3,3,l);

for i=1:l

lam.u12(i)=lam.E2(i)*lam.u21(i)/lam.E1(i);
mat.Q(1,1,i)=lam.E1(i)/(1-lam.u12(i)*lam.u21(i));
mat.Q(1,2,i)=(lam.E2(i)*lam.u21(i))/(1-lam.u12(i)*lam.u21(i));
mat.Q(2,1,i)=mat.Q(1,2,i);
mat.Q(2,2,i)=lam.E2(i)/(1-lam.u12(i)*lam.u21(i));
mat.Q(3,3,i)=lam.G12(i);

end
```

Función `matQxy`

```
function [Qxy] = matQxy(Q,ang)

% Matrices de rigidez de laminado en ejes globales

T=Tq(ang);
Ttra=T';
Qxy=T*Q*Ttra;
```

Función **matP**

```
function mat = matP(lam,mat)

% Matrices de rigidez (elementos Q44, Q45, Q55)
% en ejes locales

l=length(lam.E1);
mat.P=zeros(2,2,l);

for i=1:l
    mat.P(1,1,i)=lam.G23(i);
    mat.P(2,2,i)=lam.G13(i);
end
```


Función matPxy

```
function [Pxy] = matPxy(P,ang)

% Matrices de rigidez (elementos Q44, Q45, Q55)
% en ejes globales

T=Tp(ang);
Ttra=T';
Pxy=T*P*Ttra;
```

Función Tq

```
function [T] = Tq(ang)

% Matriz de paso de ejes locales a globales para la matriz P

A=ang*pi/180;
m=cos(A);
n=sin(A);
T=[m^2, n^2, -2*m*n; n^2, m^2, 2*m*n; m*n, -m*n, m^2-n^2];
```

Función Tqinv

```
function [Tinv] = Tqinv(ang)

% Matriz de paso de ejes globales a locales para la matriz Q

A=ang*pi/180;
m=cos(A);
n=sin(A);
Tinv=[m^2, n^2, 2*m*n; n^2, m^2, -2*m*n; -m*n, m*n, m^2-n^2];
```

Función Tp

```
function [T] = Tp(ang)

% Matriz de paso de ejes locales a globales para la matriz P

A=ang*pi/180;
m=cos(A);
n=sin(A);
T=[m, -n; n, m];
```

Función Tpinv

```
function [T] = Tpinv(ang)

% Matriz de paso de ejes globales a locales para la matriz P

A=ang*pi/180;
m=cos(A);
n=sin(A);
T=[m, n; -n, m];
```

Función fuerza

```
function [exp]=fuerza(excel)

% Funcion para calcular la aceleracion, velocidad y desplazamiento
% en las probetas ensayadas (ensayo impacto a flexion en 3 puntos)
% a partir de la curva Fuerza-tiempo en archivo excel.

% Parametros del ensayo
g=9.81;
m=3.6;
E=30;

% Cargar datos Fuerza-tiempo
aux=xlsread(excel);

exp.t=aux(:,1);
exp.F=aux(:,2);

% Los datos se encuentran en microsegundos, pasar a s.
exp.t=exp.t*1e-6;

% Aceleracion
exp.a=(g-exp.F)/m;

n=length(exp.F);

% Velocidad inicial en el momento de impacto
v0=(2*E/m)^0.5;
exp.v(1)=0;

% Integracion de la velocidad aplicando la formula de Simpson compuesta
for i=2:n
    exp.v(i)=simpson(exp.a(1:i),exp.t(1:i));
end

exp.v=exp.v+v0;

% Integracion del desplazamiento, el desplazamiento en t=0 es cero.
exp.x(1)=0;
for i=2:n
    exp.y(i)=simpson(exp.w(1:i),exp.t(1:i));
end
```

Función simpson

```
function I = simpson(f,x)
% Calcula la integral de f sobre la malla definida por x
% x debe ser equiespaciado

h=x(2)-x(1);
M = length(x);
I = (2*sum(f(2:2:length(f)-1))+2*sum(f)-f(1)-f(M))*h/3;
```

A.1.2. Ejemplo de archivo de introducción de datos

El código informático lee los datos iniciales de las láminas y de la geometría de un archivo excel 97 - 2003. Los datos se dividen en dos pestañas. La primera relativa a las propiedades de las láminas y la segunda relativa a la geometría del laminado, datos iniciales y parámetros que definen la carga externa. Además permite configurar el numero de puntos en que se divide la viga para controlar la precisión de las derivadas numéricas de los desplazamientos y el factor K de corrección de cortadura.

Las figuras A.1 y A.2 muestran el archivo que se uso en el capítulo 3 para el laminado cuasi-isótropo $[0, 90, 45, -45]_S$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	E1 [Mpa]	1,26E+011	1,26E+011	1,26E+011	1,26E+011	1,26E+011	1,26E+011	1,26E+011	1,26E+011
2	E2 [Mpa]	1,10E+010	1,10E+010	1,10E+010	1,10E+010	1,10E+010	1,10E+010	1,10E+010	1,10E+010
3	G12 [Mpa]	6,60E+009	6,60E+009	6,60E+009	6,60E+009	6,60E+009	6,60E+009	6,60E+009	6,60E+009
4	G23 [Mpa]	3,93E+009	3,93E+009	3,93E+009	3,93E+009	3,93E+009	3,93E+009	3,93E+009	3,93E+009
5	G13 [Mpa]	6,60E+009	6,60E+009	6,60E+009	6,60E+009	6,60E+009	6,60E+009	6,60E+009	6,60E+009
6	h [m]	1,920E-04	1,920E-04	1,920E-04	1,920E-04	1,920E-04	1,920E-04	1,920E-04	1,920E-04
7	ang [°]	0	90	45	-45	-45	45	90	0
8	den [Kg/m3]	1578	1578	1578	1578	1578	1578	1578	1578
9	TsaiXt [Mpa]	1,95E+009	1,95E+009	1,95E+009	1,95E+009	1,95E+009	1,95E+009	1,95E+009	1,95E+009
10	TsaiXc [Mpa]	1,48E+009	1,48E+009	1,48E+009	1,48E+009	1,48E+009	1,48E+009	1,48E+009	1,48E+009
11	TsaiYt [Mpa]	4,80E+007	4,80E+007	4,80E+007	4,80E+007	4,80E+007	4,80E+007	4,80E+007	4,80E+007
12	TsaiYc [Mpa]	2,00E+008	2,00E+008	2,00E+008	2,00E+008	2,00E+008	2,00E+008	2,00E+008	2,00E+008
13	TsaiZ [Mpa]	4,80E+007	4,80E+007	4,80E+007	4,80E+007	4,80E+007	4,80E+007	4,80E+007	4,80E+007
14	TsaiS12 [Mpa]	7,90E+007	7,90E+007	7,90E+007	7,90E+007	7,90E+007	7,90E+007	7,90E+007	7,90E+007
15	TsaiS23 [Mpa]	5,00E+007	5,00E+007	5,00E+007	5,00E+007	5,00E+007	5,00E+007	5,00E+007	5,00E+007
16	TsaiS13 [Mpa]	7,90E+007	7,90E+007	7,90E+007	7,90E+007	7,90E+007	7,90E+007	7,90E+007	7,90E+007
17	U21	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28

Figura A.1: Ejemplo de archivo excel con datos iniciales. Láminas

The screenshot shows the OpenOffice.org Calc application window titled 'exp6.xls - OpenOffice.org Calc'. The menu bar includes Archivo, Editar, Ver, Insertar, Formato, Herramientas, Datos, Ventana, and Ayuda. The toolbar contains various icons for file operations, editing, and formatting. The status bar at the bottom indicates 'Hoja 2 / 2', 'PageStyle_laminado', '90%', 'STD', and 'Suma=0'.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	L [m]	8,00E-002							
2	B [m]	2,00E-002							
3	puntos	100							
4	K	0,83							
5	At [s]	1,00E-005							
6	w0 [m]	0							
7	dw0/dwt [m/s]	0							
8	F [N]	-100,00000							
9	tc (s)	1,00E-003							
10	tmax (s)	1,00E-003							
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									

Figura A.2: Ejemplo de archivo excel con datos iniciales. Laminado

A.2. Nomenclatura

Símbolo	Descripción
A	Área de la sección, m^2
a, b, \tilde{b}	Números de onda, $\frac{1}{m}$
a_c	Número de onda crítico
A_{ij}	Elemento ij de la matriz de rigidez plana
α_x	Giro por flexión de la sección transversal, rad
B	Anchura de la viga, m
B_{ij}	Elemento ij de la matriz de acoplamiento
C_{ij}	Elemento ij de la matriz de rigidez a cortadura
D_{ij}	Elemento ij de la matriz de rigidez a flexión
E	Módulo de Young, $\frac{N}{m^2}$
ε_i	Deformación en la dirección i
$f(x, t)$	Carga distribuida normal a la viga, $\frac{N}{m}$
$\phi(x, t)$	Giro sección x , tiempo t , rad
$\varphi(x)$	Solución espacial al giro
ϕ_x	Giro total de la sección transversal, rad
γ_x	Giro por cortadura de la sección transversal, rad
γ_{ij}	Deformación angular en las direcciones ij
G	Módulo de cortadura, $\frac{N}{m^2}$
H	Espesor de la viga, m
I	Momento de inercia respecto al eje neutro, m^4
K	Factor de corrección de cortadura
κ_i	Curvatura según la dirección i , $\frac{1}{m}$
L	Longitud de la viga, m

Símbolo	Descripción
M	Momento flector, $N.m$
N	Esfuerzo axil, N
$P(x, t)$	Carga puntual normal a la viga, N
Q	Esfuerzo cortante, N
\bar{Q}_{ij}	Elemento ij de la matriz de rigidez en ejes globales
Q_{ij}	Elemento ij de la matriz de rigidez en ejes locales
r_i	Raíz i de la ecuación característica, $\frac{1}{m}$
ρ	Densidad, $\frac{Kg}{m^3}$
$T(t)$	Solución temporal
t	tiempo, s
U	Energía de deformación
u, v, w	Desplazamientos en las direcciones x, y, z , m
ν	Coefficiente de Poisson
ω_i	Frecuencia natural i de la viga, $\frac{rad}{s}$
ω_c	Frecuencia natural crítica
$w(x, t)$	Desplazamiento vertical sección x , tiempo t , m
$W(x)$	Solución espacial al desplazamiento vertical

Bibliografía

- [1] J.R. Banerjee. Frequency equation and mode shape formulae for composite Timoshenko beams. *Composite Structures* 51, pages 381–388.
- [2] Ever J. Barbero. *Introduction to composite materials design*. Taylor & Francis.
- [3] E. Barbero Pozuelo, R. Zaera Polo, and C. Navarro Ugena. *Elasticidad anisótropa*. Apuntes de Clase.
- [4] J.C. Brewer and P.A. Lagace. Quadratic stress criterion for initiation of delamination. *Journal of Composite Materials* 22, pages 1141–1155.
- [5] F. Chang and K.A. Chang. A progressive damage model for laminated composites containing stress concentrations. *Journal of Composite Materials* 21, pages 834–855.
- [6] Xing-Jian Dong, Guang Meng, Hong-Guang Li, and Lin Ye. Vibration analysis of a stepped laminated composite timoshenko beam. *Mechanics Research Communications* 32, pages 572–581, 2005.
- [7] M.G. Farchaly and S.H. Shebl. Exact frequency and mode shape formulae for studying vibration and stability of timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration* 180, pages 205–227.
- [8] Seon M. Han, Haym Benaroya, and Timothy Wei. Dynamics of transversely vibrating beams using gour engineering theories. *Journal of Sound and vibration* 225, pages 935–988.
- [9] A.M. Horr and L.C. Schmidt. Closed Form solution for the Timoshenko beam theory using a computer based mathematical package. *Computers and structures* 55, pages 405–412.

- [10] J.P. Hou. Prediction of impact damage in composite plates. *Composite Science and Tecnology* 60, pages 445–450.
- [11] R.K. Kapania and S Raciti. Recent advances in analysis of laminated beams and plates. *AIAA Journal* 27, pages 923–946.
- [12] Felipe Lafita Babio and Hilario Mata Cortés. *Vibraciones mecánicas en ingeniería*. Inta.
- [13] Prabhu Madabhusi-Raman and Julio F. Davalos. Static shear correction factor for laminated rectangular beams. *Composites part B* 27, pages 285–293.
- [14] Joan A. Mayugo Majo. *Estudio constitutivo de materiales compuestos laminados sometidos a cargas cíclicas*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, 2003.
- [15] S.S. Rao. *Mechanical Vibrations*. Addison Wesley.
- [16] J.N. Reddy. *Mechanics of laminated composites plates*. CRC Press, 1997.
- [17] Sonia Sanchez saez. *Comportamiento mecánico a flexión y tolerancia al daño de materiales compuestos de fibra de carbono y matriz epoxi a baja temperatura*. PhD thesis, Universidad Carlos III de Madrid, 2002.
- [18] Carlos Santiuste Romero. *Análisis y modelización de vigas de tipo laminado sometidas a cargas impulsivas*. PhD thesis, Universidad Carlos III de Madrid, 2007.
- [19] Mark J. Schultz and J. Frank Pai. Shear correction factors and an energy consistent beam theory. *International Journal of Solids and Structures* 36, pages 1523–1540.
- [20] Francis J. Shaker. *Method of calculating the normal modes and frequencies of a branched Timoshenko beam*. National Aeronautics and space administration, 1968.
- [21] P.D. Soden, M.J. Hintonb, and A.S. Kaddoura. Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates. *Composites Science and Technology* 58, pages 1011–1022.

- [22] Stephen P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger. *Teoría de placas y láminas*. Urmo, 2005.
- [23] N.F.J. van Rensburg and A.J. van der Merwe. Natural frequencies and modes of a Timoshenko beam. *Wave motion* 44, pages 58–69.
- [24] W. Jr Weaver, S.P. Timoshenko, and D.H. Young. *Vibration Problems in Engineering*. Wiley, John & Sons, 1990.

